Analyis II
TUHH
VL 2, 14. April 2016

Riemann Integral, Integrationsregeln

Michael Hinze

Eigenschaften des Riemann Integrals und R-Integrierbarkeit von Funktionen

Satz 1: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f R-integrierbar.

Nachweis: $s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n+1} m_j (x_j - x_{j-1})$, $S_f(Z) = \sum_{j=1}^{n+1} M_j (x_j - x_{j-1})$.

Sie wissen: f beschränkt, also existieren Ober- und Unterintegral

$$\bar{I}_f \geq \underline{I}_f$$

Zeige: $S_f(Z) - s_f(Z) \to 0$ ($\Delta x \to 0$, wobei $\Delta x := \max_{1 \le j \le n+1} |x_j - x_{j-1}|$)

Es gilt aber $S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n+1} \underbrace{(M_j - m_j)}_{\leq \varepsilon \text{ für } n \text{ groß genug, weil } f \text{ stetig}} (x_j - x_{j-1}) \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon (x_j - x_{j-1})}_{= \varepsilon (b-a)}$,

d.h. $S_f(Z) - s_f(Z) \to 0$ ($\Delta_x \to 0$), also $\bar{I}_f = \underline{I}_f$, d.h.

f R-integrierbar $\boxtimes$

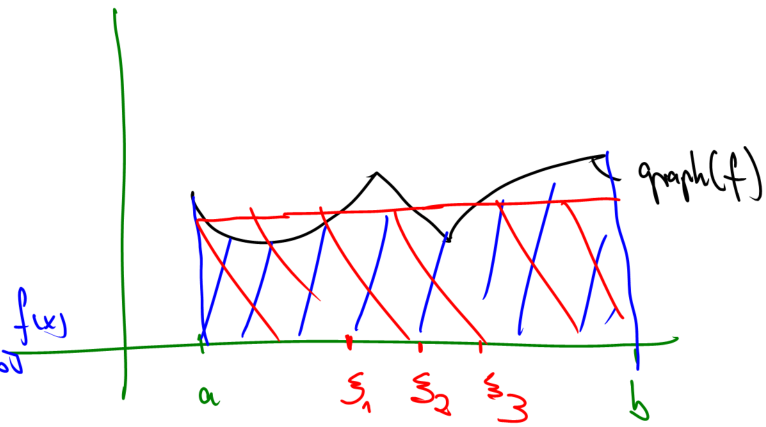
Folgerung 2: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig bis auf endlich viele Unstetigkeitsstellen erster Art. Dann ist f R-integrierbar.

Satz 3: Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f R-integrierbar.

Nachweis: SgL bzw Übungsaufgabe.

Satz 4: (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$



Nachweis: $m := \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M := \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Dann

$$m(b-a) \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le M(b-a)$$

Damit (weil f ja integrierbar, da stetig)

$$m(b-a) \geq \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

bzw

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Konstante Zahl } c} \le \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen: f nimmt jeden Wert zwischen m und M an. Also gibt es $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(\xi) = c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \boxed{3}$$

Verallgemeinerte Version $\rightsquigarrow$ SgL

Satz 5: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{Stammfunktion zu } f$$

Nachweis: Zeige $F'(x) = f(x)$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right)$$

Integrationsregeln

$$\underset{\text{Folie 14(3)}}{=} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \underset{\substack{\text{Integr.Rech.} \\ \xi_h \in (x, x+h)}}{\overset{\text{MWS}}{=}} \frac{1}{h} f(\xi_h) \underbrace{(x+h-x)}_{h}$$

$$= f(\xi_h) \longrightarrow f(x) \quad (h \to 0)$$

$\Longrightarrow$ F diffbar mit $F'(x) = f(x)$. $\boxed{B}$

Folgerung 6: F Stammfunktion zu f, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b =: \int f(x)\,dx$$

Bspl: i.) $f(x) = x^n$. Dann $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Longrightarrow \int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b$$

ii) $f(x) = \sin x$ $\quad F(x) = -\cos x$. Also $\displaystyle\int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b$

⋮

Substitutionsregel für R-integrierbare Funktionen

$f : I \to \mathbb{R}$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, F Stammfunktion zu f

Dann gilt für $F \circ \varphi$: $\left(F(\varphi(x))\right)' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x)$
$= f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$.

D.h. $F \circ \varphi$ ist Stammfunktion zu $(f \circ \varphi)\varphi'$

Satz 5 und Folgerung liefern damit

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b = \underbrace{F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))}_{\text{weil } F' = f} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

<u>Kurz</u>: $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$

<u>Bsp</u> i) $\displaystyle\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt \underset{\text{für } \varphi(t) \neq 0}{\overset{x=\varphi(t)}{=}} \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln|\varphi(t)|\Big|_a^b$

z.Bsp ist $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = -\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$. Also

$$\int_a^b \tan t\,dt = -\ln|\cos t|\Big|_a^b, \quad \text{wobei } (a,b) \subset \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

<u>Produktintegration</u>

$F(x) := f(x)\,g(x)$. $\quad F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \left(f(x)g(x)\right)'$

$$F(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b = \int (f(x)g(x))'\,dx \underset{\text{Linearität}}{=} \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Damit "$\int f'g = fg - \int fg'$"

<u>Bsp</u> i) $a,b > 0$ $\displaystyle\int_a^b \ln x\,dx = ?$

Dazu schreibe

$$\int_a^b \ln x\, dx = \int_a^b \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g}\, dx = \underbrace{x}_{f} \underbrace{\ln x}_{g} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{x}_{f} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\, dx$$

$$= \left(x \ln x - x \right) \Big|_a^b$$

ii) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g}\, dx = \underbrace{-\cos x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g} - \int (-\cos x) \cos x\, dx$

$$= -\cos x \sin x + \int 1 - \sin^2 x\, dx$$

$$= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x\, dx$$

$+$

$\longrightarrow \quad 2 \displaystyle\int \sin^2 x\, dx = x - \cos x \sin x$ bzw $\displaystyle\int \sin^2 dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x)$

Analyis II
TUHH
VL 2, 15. April 2016

Riemann Integral, Integrationsregeln

Michael Hinze

Integrierbarkeitseigenschaften bekannter Funktionen

<u>Satz 1</u>: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f R-integrierbar.

<u>Nachweis</u>: i) f stetig auf $[a,b]$, dann ist f gleichmäßig stetig, weil $[a,b]$ abgeschlossen und beschränkt, und f ist insbesondere beschränkt. Damit existieren $\underline{I}_f$ und $\overline{I}_f$. Ferner gilt für

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{i=1}^{n+1} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es N s.d. $M_i - m_i < \varepsilon$ $\forall_{i=1,\dots,n+1}$ und alle $n \geq N$.

Damit

$$S_f(Z) - s_f(Z) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b-a)$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, gilt $S_f(Z) - s_f(Z) \to 0$ für $\Delta x \to 0$. Damit gilt dann auch $\underline{I}_f = \overline{I}_f$, d.h. f ist R-integrierbar. ☒

<u>Folgerung 2</u>: Besitzt $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ nur endlich viele Unstetigkeits-

stellen erster Art, so ist f R-integrierbar.

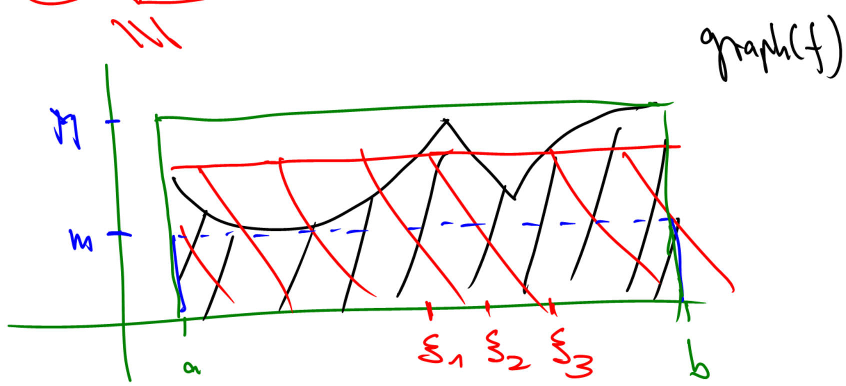
Satz 3: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton. Dann ist f R-integr.

Nachweis Sg L ∎

Satz 4 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \quad \text{mit einem } \xi\in(a,b).$$



Nachweis: $m := \min_{[a,b]} f(x)$,

$M := \max_{[a,b]} f(x)$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \iff m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\in\mathbb{R}\ \text{Zahl}} \le M$$

f stetig. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $\xi\in(a,b)$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

wzbw.

Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration:

Satz 5 (Erster Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{Stammfunktion zu } f,$$

d.h. es gilt $F'(x) = f(x)$.

Nachweis. Betrachte

$$\underbrace{\frac{F(x+h) - F(x)}{h}}_{\to F'(x)} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \underset{\text{Integr.-Regel}}{\overset{\text{MWS}}{=}} \frac{1}{h} f(\xi_h)(x+h-x)$$

$$= \underbrace{f(\xi_h)}_{\xrightarrow{h \to 0} f(x)} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\xi_h}_{\longrightarrow x \ (h \to 0)} \in (x, x+h)$$

$\boxtimes$

Satz 6 (2ter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei F Stammfunktion zu f. Dann gilt (beachte $\int_a^a f(x)\,dx := 0$, $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \overset{\text{Notation}}{=} F(x)\Big|_a^b \overset{\text{Not}}{=} \text{“} \int f(x)\,dx = F(x) \text{”}$$

Nachweis: 2 Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante, d.h. mit $F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ gilt $F - F_0 \equiv$ Konstante,

Also $F(b) - F(a) = F_0(b) - \underbrace{F_0(a)}_{=0} = \int_a^b f(t)\,dt$.

Folgerungen: $f(x) = x^n$ $F(x)$ $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Damit gilt

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

Analog $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$

$$\longrightarrow \int_a^b \sin x \, dx = -\cos x \Big|_a^b$$

$\vdots$

Satz 7 Substitutionsregel der Integration

$f: I \to \mathbb{R}$, $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi([a,b]) \subset I$ und φ diffbar. F Stammfunktion zu f. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

Nachweis: Wir wissen: $F(\varphi(x))' = \underbrace{F'(\varphi(x))}_{f(\varphi(x))\varphi'(x)}\varphi'(x)$ (Kettenregel)

D.h. $F \circ \varphi$ ist Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\varphi'$. Der Hauptsatz liefert

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

weil F Stammfunktion zu f.

Bsp: $\displaystyle\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt \underset{\varphi(t)\neq 0}{\overset{x=\varphi(t)}{=}} \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$

$$= \ln|\varphi(t)|\Big|_a^b \qquad \varphi(t) = \cos t,\ \varphi'(t) - \sin t$$

Ist mit $\displaystyle\int_a^b \tan t\,dt = \int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = -\ln|\cos t|\Big|_a^b \quad [a,b] \subset (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$.

<u>Satz 8</u>: (Produktintegration). Es gilt

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx,$$

denn $F(x) := f(x)g(x)$, so gilt $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$= (f(x)g(x))'$

Nach Hauptsatz 2:

$$F(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx$$

$$= \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

<u>Bsp</u> a) $\int_a^b \ln x\,dx \qquad a,b>0$

$$\int_a^b \underbrace{1}_{f'}\,\underbrace{\ln x}_{g}\,dx = x\ln x\Big|_a^b - \int_a^b x\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\ln x\Big|_a^b - x\Big|_a^b = x(\ln x - 1)\Big|_a^b$$

b) $$\int \sin^2 x\,dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'}\,\underbrace{\sin x}_{g}\,dx$$

$$= -\underbrace{\cos x}_{f}\,\underbrace{\sin x}_{g} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{f}\,\underbrace{\cos x}_{g'}\,dx$$

$$= -\cos x\sin x + \int 1 - \sin^2 x\,dx$$

$$= -\cos x\sin x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad 2\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x \,, \quad \text{also}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \cos x \sin x\right).$$

$\boxed{B}$