# Analysis II

**Michael Hinze**
**(zusammen mit Peywand Kiani)**

**Department Mathematik**
**Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg**

**WiSe 2015/2016**

# Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\rightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

# Kap. 2.13–Kap. 2.17 – Integration

**Fragestellungen:**

- **Rekonstruktion einer Funktion $F$ aus Kenntnis über deren Ableitung $F'(x) \equiv f(x)$,**
- **Berechnung von Flächen krumm berandeter Gebiete,**
- **Berechnung von Arbeit = Kraft $\times$ Weg entlang von krummlinigen Trajektorien (=Bahnen),**
- **Berechnung des Volumens von Rotationskörpern,**
- **Umkehrung von Differentiation**

# Buch Kap. 2.13 – Integration, Stammfunktion

**Definition 2.33: (Stammfunktion)**
**Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I$ definierte reellwertige Funktion.**

**Die differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft**

$$F' = f$$

**heißt Stammfunktion von $f$.**

**Stammfunktionen sind nur bis auf Konstanten festgelegt, d.h. mit $F$ ist auch $F + C$ für $C \in \mathbb{R}$ Stammfunktion zu $f$.**

# Buch Kap. 2.13 – Integration, Zerlegungen

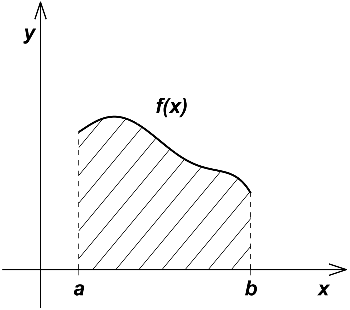


Abbildung: 2.54: Fläche von ***f*** auf **[*a*, *b*]**

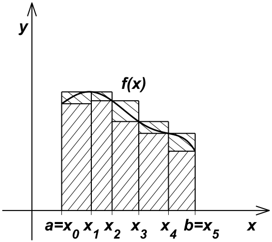


Abbildung: 2.55: Zerlegung ***Z***, Obersumme und Untersumme

# Buch Kap. 2.13 – Integration, Zerlegungen

**Es wird eine Streifeneinteilung wie in Abb. ?? gebildet, wobei jeweils Streifen der Breite $\Delta x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, mit den beliebig gewählten Punkten $x_0, x_1, x_2,\ldots,x_n$**

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \tag{1}$$

**betrachtet werden. Die Menge der so gebildeten Teilintervalle**

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

**heißt Zerlegung $Z$ des Intervalls $[a, b]$. Die größte der Teilintervalllängen $\Delta x_i$**

$$|Z| := \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$

**heißt Feinheit der Zerlegung $Z$. Wie in der Abb. 2.55 angedeutet, bildet man in jedem Streifen zwei Rechtecke, die die Fläche von $f$ von "oben" und von "unten" annähern. Falls $f$ beschränkt ist, existiert auf allen Teilintervallen obere und untere Grenze $f$**

$$M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\ . \tag{2}$$

# Buch Kap. 2.13 – Integration, Zerlegungen

**Über dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ entsteht ein "unteres" Rechteck mit dem Flächeninhalt $m_i \Delta x_i$ und ein "oberes" Rechteck mit dem Flächeninhalt $M_i \Delta x_i$. Eine Summation über $i$ ergibt**

$$\begin{aligned} S_f(Z) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, && \text{die Obersumme von } f \text{ bezüglich } Z, \text{ und} \\ s_f(Z) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, && \text{die Untersumme von } f \text{ bezüglich } Z. \end{aligned}$$

**Wählt man mit $\xi_i$ einen beliebigen Punkt aus dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1,2,\ldots,n$, so gilt $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ und deshalb auch**

$$s_f(Z) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq S_f(Z) \ .$$

**Die Summe $R(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ heißt Riemannsche Summe bezüglich der Zerlegung $Z$.**

# Buch Kap. 2.13 – Integration, Zerlegungen

**Es ist offensichtlich, dass bei immer feiner werdenden Zerlegungen die Obersummen im Allg. immer kleiner und die Untersummen immer größer werden. Damit ist es sinnvoll, Infimum aller Obersummen und Supremum aller Untersummen zu bilden:**

$$\begin{aligned} \bar{I}_f &:= \inf_Z S_f(Z), && \text{genannt Oberintegral von } f, \\ \underline{I}_f &:= \sup_Z s_f(Z), && \text{genannt Unterintegral von } f. \end{aligned}$$

**Dabei bedeutet $\inf_Z$ und $\sup_Z$, dass das Supremum bzw. Infimum über der Menge aller Zerlegungen gebildet wird.**
**Sind $Z_1$ und $Z_2$ zwei beliebige, unterschiedliche Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, dann kann man eine verfeinerte Zerlegung $Z$ aus den Durchschnitten der Teilintervalle von $Z_1$ und $Z_2$ bilden. Es ist dann offensichtlich**

$$\begin{aligned} s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2) \, , \\ s_f(Z_2) \leq s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_1) \, . \end{aligned} \tag{3}$$

# Buch Kap. 2.13 – Integration, Zerlegungen

**Damit ergibt sich insbesondere, dass für beliebige Zerlegungen $Z_1$, $Z_2$**

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2) \quad \text{und} \quad s_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$$

**ist. Daraus folgt, dass die Menge der Obersummen nach unten beschränkt ist, und die Menge der Untersummen nach oben. Daraus folgt die Existenz von $\overline{I}_f$ und $\underline{I}_f$ und**

$$\underline{I}_f \leq \overline{I}_f .$$

**Aus der Definition der Riemannsche Summe wird deutlich, dass der Wert irgendeiner Riemannschen Summe zwischen dem der Ober- und dem der Untersumme liegen, die zu derselben Zerlegung gehören. Für stetige Funktionen auf jeden Fall, aber auch für viele andere übliche Funktionen ist $\underline{I}_f = \overline{I}_f$. Ist $(Z_k)$ eine Zerlegungsfolge, für die $\lim_{k\to\infty} |Z_k| = 0$ gilt, so heißt $(Z_k)$ ausgezeichnete oder zulässige Zerlegungsfolge. Gilt $\underline{I}_f = \overline{I}_f$, so folgt aufgrund von (3)**

$$\lim_{k\to\infty} s_f(Z_k) = \underline{I}_f = \lim_{k\to\infty} R(Z_k) = \overline{I}_f = \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k) .$$

**Die durchgeführten Betrachtungen rechtfertigen die folgende Definition.**

# Buch Kap. 2.13 – Riemann Integral

**Definiton 2.34: (Integrierbarkeit, RIEMANNsches Integral)**
**Eine auf $[a, b]$ beschränkte Funktion $f$ heißt im Intervall $[a, b]$ RIEMANN-integrierbar, falls das Unter- und Oberintegral von $f$ übereinstimmen, d.h. falls $\underline{I}_f = \overline{I}_f$ gilt.**

**Der gemeinsame Grenzwert $\overline{I}_f = \underline{I}_f$ wird bestimmtes RIEMANNsches Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ genannt und mit**

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

**bezeichnet.**

**$a$ heißt untere und $b$ obere Integrationsgrenze und $[a, b]$ wird Integrationsintervall genannt. $x$ heißt Integrationsvariable und $f(x)$ Integrand.**