Analyis II

TUHH

VL 1, 7. April 2016

Riemann Integral

Michael Hinze

Frage: Kann eine Funktion F aus ihrer Ableitung rekonstruiert werden?

Geg.: $F'(x) = f(x)$ ($f(x)$ bekannt). Wie sieht $F(x)$ aus?

Aufgabe so nicht eindeutig lösbar, denn es gilt

$$(F(x) + c_1)' = F'(x) \quad , \quad \text{falls } c_1 \text{ Konstante}$$

Formuliere die Aufgabe etwas anders:

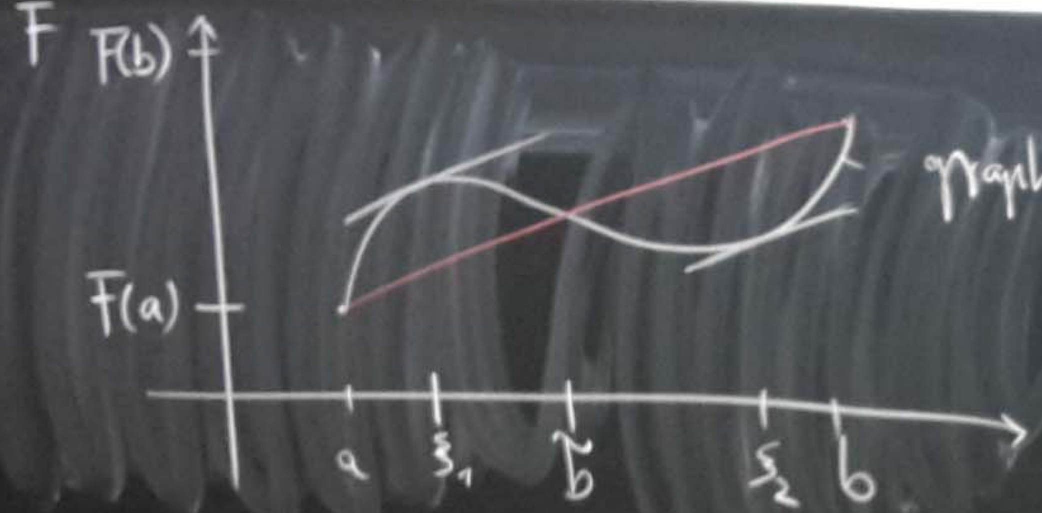
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $F(a) \in \mathbb{R}$ gegeben.

Frage: Ist $F(b)$ gesucht aus $F(a)$ und der Beziehung "$F'(x) = f(x)$" mit gegebenem $f(x)$ berechenbar?

Wir wissen

$$F(b) - F(a) \underbrace{=}_{\text{Mittelwertsatz}} F'(\xi)(b-a) \quad \text{mit } \xi \in (a,b)$$
$$= f(\xi)(b-a)$$

Es kann aber mehrere solcher ξ's geben, siehe Tafel Skizze



$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi)$$

Steigung der

Hier $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi_i)$ Geraden

$i = 1, 2$

Idee: Zerlege das Intervall $[a,b]$ in Teilintervalle

$Z: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ (Zerlegung Z)

und schreibe

$$
\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= F(b) - F(x_n) \\
&\quad + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\
&\quad + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + F(x_1) - F(a)
\end{aligned}
\overset{\text{MWS}}{=}
\begin{aligned}
& f(\xi_n)(b - x_n) && \xi_n \in (x_n, b) \\
+\, & f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) && \xi_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n) \\
+\, & f(\xi_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}) && \xi_{n-2} \in (x_{n-2}, x_{n-1}) \\
& \vdots && \vdots \\
+\, & f(\xi_1)(x_1 - a) && \xi_1 \in (a, x_1)
\end{aligned}
$$

$$=: R(Z)$$

$R(Z)$ ist Riemann Summe der Funktion f zur Zerlegung Z und den Punkten $\xi_1 \in [x_0, x_1], \dots, \xi_n \in [x_n, x_{n+1}]$

Falls $R(Z)$ gegen eine Zahl $\bar{R}$ konvergiert, wenn die Zerlegungsfeinheit $\Delta x := \max\limits_{1 \le i \le n+1} |x_i - x_{i-1}|$ gegen $\underbrace{0}_{\text{Null}}$ strebt, dann gilt

$$F(b) = F(a) + \bar{R}$$

Tafelbeispiel: $\bar{R}$ = Fläche unter dem Graph von f.

Sei nun eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Erkläre zu f nun Zerlegungen Z mit Zwischenpunkten $\xi_1, \dots, \xi_n$ wie oben;

$$Z: \quad a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < x_{n-1} < \xi_n < x_n < \xi_{n+1} < x_{n+1} = b$$

Setze $R(Z) := f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_{n+1})(x_{n+1} - x_n)$

$$\equiv \sum_{i=0}^{n} f(\xi_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$$

Ziel: Charakterisiere Funktionen f, für die $R(Z)$ konvergiert, falls $\Delta x \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$.

Idee: Schließe $R(Z)$ zwischen einer Untersumme $s_f(Z)$ und einer Obersumme $S_f(Z)$ ein;

$$s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z)$$, siehe Tafel

Setze $\underline{I}_f := \sup_Z s_f(Z)$ Unterintegral von f

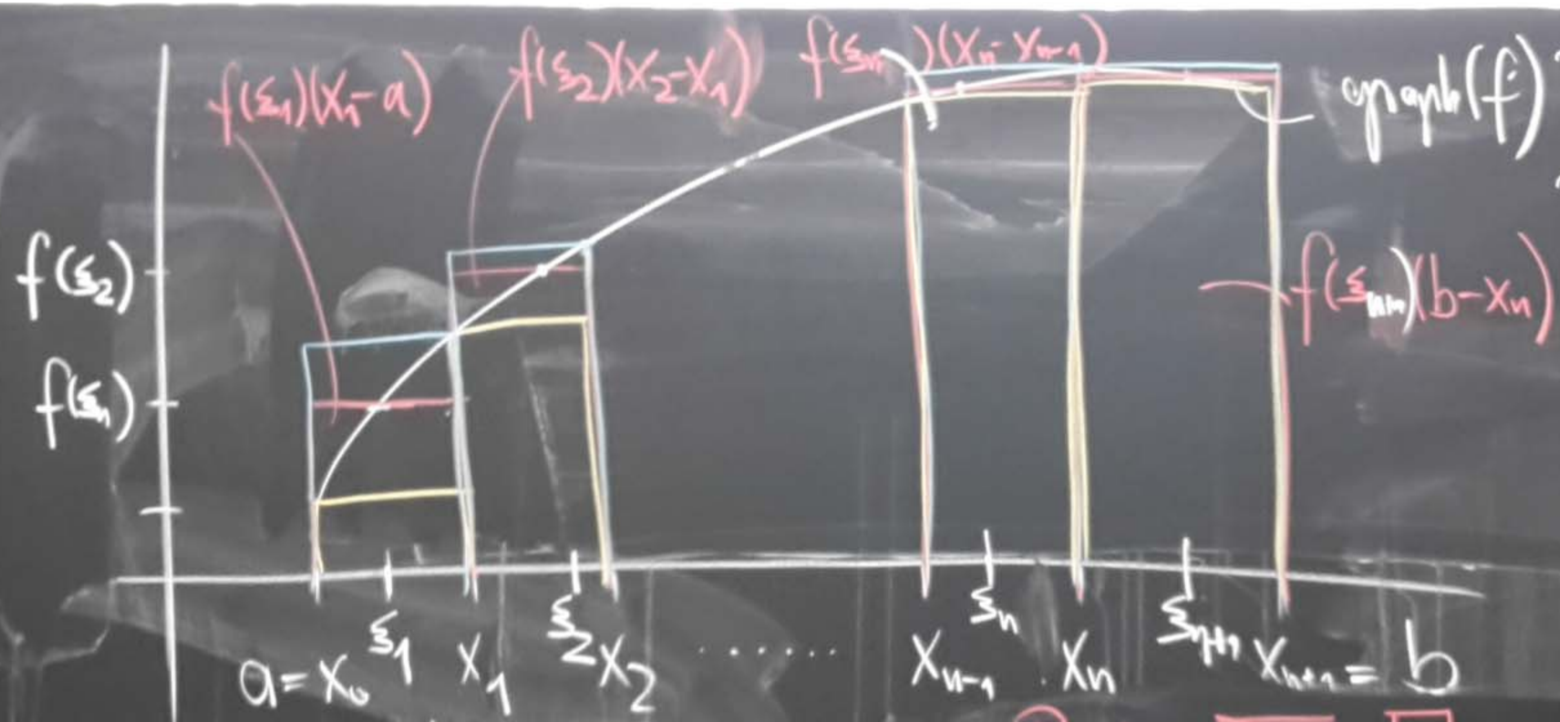
$\overline{I}_f := \inf S_f(Z)$ Oberintegral von f

Aus den Überlegungen an der Tafel ergibt sich für zwei beliebige Zerlegungen Z_1 und Z_2

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$$

$$s_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$$

Damit $\underline{I}_f \leq \overline{I}_f$ und $\underline{I}_f, \overline{I}_f$ existiert, falls etwa f beschränkt.



Betrachte $R(Z)$ für eine Funktion $f(x)$

$$s_f(Z) = \sum \square \le R(Z) = \sum \square \le S_f(Z) = \sum \square$$

Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt $\underbrace{\text{Riemann integrierbar}}_{\text{R-integrierbar}}$, falls

$$\underline{I}_f = \overline{I}_f$$

gilt.

<u>Beachte</u>: Ist f R-integrierbar, ist unsere Aufgabe eindeutig lösbar;

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)\,dx,$$

wobei wir definieren:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \underline{I}_f}$$

Analyis II
TUHH
VL 1, 8. April 2016

Riemann Integral

Michael Hinze

Aufgabe: Rekonstruiere die Funktion F aus der Kenntnis einer Funktion f und der Relation $F'(x) = f(x)$

Beobachte: $(F(x) + c)' = F'(x)$, falls c Konstante.

D.h. eindeutige Rekonstruktion wird i.d.R. nicht gelingen

Betrachte eine leicht modifizierte Aufgabe:

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben, $a < b$, ferner sei $F(a)$ gegeben.

<u>Frage</u>: Ist $F(b)$ eindeutig aus $F(a)$ und Beziehung "$F' = f$" mit gegebenem f rekonstruierbar?

MWS liefert $F(b) = F(a) + \overbrace{F'(\xi)}^{f(\xi)}(b-a)$ mit $\xi \in (a,b)$

Leider ξ nicht immer eindeutig bestimmt, siehe Diskussion an der Tafel.

<u>Idee</u>: Zerlege Intervall in Teilintervalle und wende MWS auf

den Teilintervallen an;

$Z: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$

Schreibe

beachte $F'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(b) - F(x_n) & \overset{\text{MWS}}{=} \quad & f(\xi_{n+1})(b - x_n) \\ &+ F(x_n) - F(x_{n-1}) & & + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &+ F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) & & + f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &\vdots & & \vdots \\ &+ F(x_1) - F(a) & & + f(\xi_1)(x_1 - a) \end{aligned}$$

$R(Z)$

Lasse Unterteilungsfeinheit $\Delta x := \max\limits_{0 \le j \le n+1} |x_{j+1} - x_j|$ gegen Null streben für $n \to \infty$.

Gilt jetzt

$$R(Z) \longrightarrow \bar{R} \qquad \text{für } n \to \infty,$$

Dann ist unsere Aufgabe gelöst, denn dann ist

$$F(b) = F(a) + \bar{R}.$$

Frage: Für welche Funktionen f sind die Summen $R(Z)$ (Riemann Summen) unabhängig von der Unterteilung

$Z: \quad a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < x_n < \xi_{n+1} < x_{n+1} = b$

konvergent, wenn $\Delta x := \max\limits_{0 \le j \le n} |x_{j+1} - x_j| \longrightarrow 0$

Betrachte neben der Riemann Summe $R(Z)$ auch die

Untersumme $\quad s_f(Z) := \sum_{i=0}^{n} m_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$, sowie die

Obersumme $\quad S_f(Z) := \sum_{i=0}^{n} M_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$

mit $\quad m_i := \min\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $\quad M_i := \max\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Dann gilt

$$s_f(Z) \le R(Z) \le S_f(Z) \qquad \text{für jede Zerlegung } Z$$

<u>Idee</u>: Suchen Funktionen aus, für die

$$\underline{I}_f := \sup_Z s_f(Z) \quad \text{und} \quad \overline{I}_f := \inf_Z S_f(Z)$$

existieren und gleich sind, d.h. $\overline{I}_f = \underline{I}_f$.

<u>Def.</u>: $\underline{I}_f$ heißt Unterintegral von f, $\overline{I}_f$ Oberintegral

Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, falls $\underline{I}_f = \overline{I}_f$ gilt.

<u>Beachte</u>: Ist f R-integrierbar, so ist unsere Aufgabe eindeutig lösbar mit $F(b) = F(a) + \overline{R}$, $\overline{R} = \underline{I}_f$

Notation: $\int_a^b f(x)\,dx := \underline{I}_f$ Riemann Integral von f über $[a,b]$.

Bei der Definition des Riemann Integrals ist von zentraler Bedeutung: Seien Z_1, Z_2 beliebige Zerlegungen. Dann gilt immer

$$s_f(Z_1) \le S_f(Z_2)$$
$$s_f(Z_2) \le S_f(Z_1),$$

$Z_1 \cup Z_2$ Zerlegung, die alle Punkte aus Z_1 <u>und</u> Z_2 enthält

denn

$$s_f(Z_1) \le s_f(Z_1 \cup Z_2) \le R(Z_1 \cup Z_2) \le S_f(Z_1 \cup Z_2) \le S_f(Z_2)$$

$$s_f(Z_2) \le S_f(Z_1) \quad \text{analog}$$

Damit ex. $\underline{I}_f$ und $\overline{I}_f$ für solche f

Aus der Konstruktion des Integrals folgt

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, falls wir definieren:

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0, \qquad \int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

<u>Beispiel</u>: Berechne $\int_0^a x^2\,dx \quad \left(= \frac{1}{3}a^3 \right)$

Zerlegungsfolge: $Z_k : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = a$

mit $x_i := i\frac{a}{k}$ $(i = 0, 1, \dots, k)$. Dann $\Delta x = \frac{a}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

(äquidistante Unterteilung)

$$S_f(Z_k) = \sum_{j=1}^{k} \left(j\frac{a}{k}\right)^2 \frac{a}{k} = \left(\frac{a}{k}\right)^3 \underbrace{\sum_{j=1}^{k} j^2}_{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)} \qquad \left(= \sum_{j=1}^{k} f(x_j)(x_j - x_{j-1})\right)$$

$$s_f(Z_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \left(j\frac{a}{k}\right)^2 \frac{a}{k} = \left(\frac{a}{k}\right)^3 \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} j^2}_{\frac{1}{6}(k-1)k(2k-1)} = \frac{1}{3}a^3 + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Es gilt

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{3}k^3 + O(k^2)$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} j^2 = \frac{1}{3}k^3 + O(k^2)$$

Damit

$$\underbrace{s_f(Z_k)}_{\xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3}a^3} = \frac{1}{3}a^3 + \underbrace{O\left(\frac{1}{k}\right)}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} = \underbrace{S_f(Z_k)}_{\to \frac{1}{3}a^3 \ (k\to\infty).}$$