Fachbereich Mathematik **SoSe 2016**
Prof. Dr. M. Hinze

Klausur zur Mathematik II
(Modul: Analysis II)

01. September 2016

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	BU	ET	IIW	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1) [6+ 4]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{3x^2 - 9x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}\, dx\,.$$

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}\,,\quad f(x) \;=\; \arctan(x)\,.$

Es gilt $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sowie $f(0) = 0$ und $f(1) \;=\; \frac{\pi}{4}\,.$

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der einfachen Trapezregel ($h = 1$) eine Näherung $T(f,1)$ für

$$I := \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\max_{x\in[0,1]} |f''(x)| \leq 2\,.$$

gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass folgende Abschätzung gilt:

$$|I - T(f,1)| \;\leq\; \frac{1}{6}\,.$$

Lösung der Aufgabe 1) [6 + 4]

a) $x^3 - 6x^2 + 9x \;=\; x(x^2 - 6x + 9) \;=\; x(x-3)^2\,.$ **[1 Punkt]**

Ansatz: $\dfrac{3x^2 - 9x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} \;=\; \dfrac{a}{x} \;+\; \dfrac{b}{x-3} \;+\; \dfrac{c}{(x-3)^2}\,.$ **[1 Punkt]**

Die Koeffizienten errechnen sich aus der Bedingung

$$a(x-3)^2 \;+\; bx(x-3) \;+\; cx \;=\; 3x^2 - 9x + 9\,.$$

Einsetzen der Nennernullstellen und Vergleich der Koeffizienten von x^2 ergibt:

$$\begin{aligned} x = 0 \;:&\quad a(-3)^2 = 9a = 9 \implies a \;=\; 1\,.\\ x = 3 \;:&\quad 3c = 3\cdot 9 - 9\cdot 3 + 9 \implies c \;=\; 3\,.\\ x^2 \;:&\quad a + b = 3 \implies b \;=\; 2\,. \end{aligned}$$ **[2 punkte]**

Somit also

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 9x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}\, dx \;&=\; \int \frac{1}{x} \;+\; \frac{2}{x-3} \;+\; \frac{3}{(x-3)^2}\, dx\\ &=\; \ln|x| \;+\; 2\ln|x-3| \;+\; 3\,\frac{(x-3)^{-1}}{-1} \;+\; C\\ &=\; \ln|x| \;+\; 2\ln|x-3| \;-\; \frac{3}{x-3} \;+\; C\,. \end{aligned}$$ **[2 punkte]**

b) (i)

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(0)+f(1)\right) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}. \qquad \textbf{[1 punkt]}$$

(ii) Für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$|f''(x)| = \left|\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right| \leq \frac{2}{(1+0^2)^2} = 2. \qquad \textbf{[2 punkte]}$$

(iii) Für den Fehler der Trapezformel gilt

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - T(f,1)\right| \leq \frac{(1-0)}{12}h^2 \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|. = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}. \qquad \textbf{[1 punkt]}$$

Aufgabe 2) (5+5 Punkte)

a) Durch $\boldsymbol{r} : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{r}(t) := (3\cos(t), 3\sin(t))^T$ sei ein Stück Draht der Dichte $\rho(x,y) := \dfrac{y}{x^2+y^2+x}$ (Masse pro Längeneinheit) beschrieben.

Berechnen Sie die Masse des Drahtes.

b) Gegeben sind folgende Daten einer Funktion $g : [\frac{1}{2}; 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = g(x)$.

x_k	$\frac{1}{2}$	1	2
$g(x_k) = y_k$	2	1	$\frac{1}{2}$

(i) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades der Funktion g zu den gegebenen Daten.

(ii) Es sei bekannt, dass $|g'''(x)| \leq 3$ für alle $x \in [\frac{1}{2}; 2]$ gilt. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung für den Interpolationsfehler im Punkt $x = 1.2$ gilt:

$$|g(1.2) - p_2(1.2)| \leq \frac{1}{10}.$$

Lösung der Aufgabe 2)

a) $\dot{r}(t) = (-3\sin t, 3\cos t)^T$

$$\Longrightarrow \quad \|\dot{r}(t)\| = \sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t)} = 3. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\rho(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{3\sin(t)}{9\cos^2(t) + 9\sin^2(t) + 3\cos(t)} = \frac{3\sin(t)}{9 + 3\cos(t)}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$M = \int_{\boldsymbol{r}} \rho(\boldsymbol{x})\, ds = \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin(t)}{9+3\cos(t)} \|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{3+\cos(t)} \cdot 3\, dt$$

$$= 3\int_{u(0)}^{u(\pi/2)} \frac{-1}{u}\, du \qquad u = 3 + \cos(t),\ \frac{du}{dt} = -\sin(t)$$

$$= -3\int_4^3 \frac{1}{u} = -3\,[\ln(|u|)]_4^3 = 3\,(\ln(4) - \ln(3)). \qquad \textbf{[3 punkte]}$$

b) (i) Die Koeffizienten des Interpolationspolynoms können durch Lösen der Gleichungen

$y_0 = a_0 = 2$,

$y_1 = 1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = 2 + a_1(1 - \frac{1}{2}) \iff a_1 = -2$,

$y_2 = \frac{1}{2} = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 2 - 2\frac{3}{2} + \frac{3a_2}{2} \iff$ $a_2 = 1$, oder durch Berechnung der dividierten Differenzen

x_j	$y_j = [x_j]$	$[x_{j-1,j}]$	$[x_{j-2,j}]$
$\frac{1}{2}$	2		
		$\frac{1-2}{1-\frac{1}{2}} = -2$	
1	1		$\frac{-\frac{1}{2}+2}{2-\frac{1}{2}} = 1$
		$\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1} = -\frac{1}{2}$	
2	$\frac{1}{2}$		

bestimmt werden. Man erhält

$$p_2(x) \;=\; 2-2\,(x-x_0)+(x-x_0)(x-x_1) \;=\; 2-2\,(x-\frac{1}{2})+(x-\frac{1}{2})(x-1)\,.$$ **[3 punkte]**

(ii)

$$\begin{aligned} |p_2\,(1.2)-g(1.2)| \;&= \frac{1}{3!}\cdot\left|g^{(3)}(\theta)\cdot(1.2-x_0)(1.2-x_1)(1.2-x_2)\right| \\ &\leq \frac{3}{6}(\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{10})\cdot\frac{8}{10}) \;=\; \frac{56}{1000} \;<\; \frac{1}{10}\,. \end{aligned}$$

[2 punkte]