

Aufgabe 1) [6+ 4]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{3x^2 - 9x + 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} dx.$$

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)$.

Es gilt $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sowie $f(0) = 0$ und $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der einfachen Trapezregel ($h = 1$) eine Näherung $T(f, 1)$ für

$$I := \int_0^1 f(x) dx.$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\max_{x \in [0,1]} |f''(x)| \leq 2.$$

gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass folgende Abschätzung gilt:

$$|I - T(f, 1)| \leq \frac{1}{6}.$$

Aufgabe 2) (5+5 Punkte)

a) Durch $\mathbf{r} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) := (3 \cos(t), 3 \sin(t))^T$ sei ein Stück Draht der Dichte $\rho(x, y) := \frac{y}{x^2 + y^2 + x}$ (Masse pro Längeneinheit) beschrieben.

Berechnen Sie die Masse des Drahtes.

b) Gegeben sind folgende Daten einer Funktion $g : [\frac{1}{2}; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = g(x)$.

x_k	$\frac{1}{2}$	1	2
$g(x_k) = y_k$	2	1	$\frac{1}{2}$

(i) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades der Funktion g zu den gegebenen Daten.

(ii) Es sei bekannt, dass $|g'''(x)| \leq 3$ für alle $x \in [\frac{1}{2}; 2]$ gilt. Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung für den Interpolationsfehler im Punkt $x = 1.2$ gilt:

$$|g(1.2) - p_2(1.2)| \leq \frac{1}{10}.$$

Viel Erfolg!