Die Bogenlängenfunktion einer C^1-Kurve.

Definition: *Sei* $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^1*–Kurve.*

- *Die Funktion*

$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$

  heißt die Bogenlängenfunktion *von* c.

- *Ist* c *glatt, so ist* $S : [a, b] \to [0, L(c)]$ *ein* C^1*-Parameterwechsel.*

- *Die Umkehrabbildung* $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, *ist dann ebenfalls ein* C^1*-Parameterwechsel.*

- *Die Parametrisierung*

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)) \qquad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

  von c *nennt man die* Parametrisierung nach der Bogenlänge. □

Eigenschaften der Bogenlängenparametrisierung.

Bemerkung: Für die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ gilt:

- Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$

  Daher ist $\tilde{c}'(s)$ ist ein Einheitsvektor, d.h. mit dieser Parametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen.
  Weiterhin ist $\tilde{c}'(s)$ der Einheitstangentenvektor von c.

- Aus $\langle \tilde{c}'(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0$$

  d.h. der Beschleunigungsvektor $\tilde{c}''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{c}'(s)$.

$\square$

Hauptnormale und Krümmung.

Definition: *Sei* $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ *die Bogenlängenparametrisierung der Kurve* c.

- *Dann bezeichnet man den Vektor*

$$n(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

  als den Hauptnormalenvektor *von* c.

- *Die Funktion*

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\| \qquad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

  nennt man die Krümmung *von* c. □

Beispiel: Mit der Parametrisierung des Einheitskreises nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(s) &= (\cos(s), \sin(s)) \qquad \text{für } 0 \leq s \leq 2\pi \\
n(s) &= \tilde{c}''(s) = -(\cos(s), \sin(s)) \\
\kappa(s) &\equiv 1
\end{aligned}$$

Parametrisierungen von Funktionsgraphen.

Betrachte Graph von $y = y(x)$ als Kurve im $\mathbb{R}^2$, d.h. $c(x) = (x, y(x))^T$. Dann:

$$c'(x) = (1, y'(x))^T \qquad ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx \qquad \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3}$$

Betrachte analog für $y(x)$ und $z(x)$ die Kurve $c(x) = (x, y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^3$:

$$c'(x) = (1, y'(x), z'(x))^T$$

$$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\,dx \qquad \text{(Bogenlängenelement)}$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\,dx$$

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)((y'')^2 + (z'')^2) - (y'y'' + z'z'')^2}}{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)}}$$

Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

- Für die Polarkoordinaten $r \equiv r(t), \varphi \equiv \varphi(t)$ im $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
c(t) &= (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T \qquad \text{für } a \le t \le b \\
L(c) &= \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\, dt.
\end{aligned}
$$

- Für die Kugelkoordinaten $r \equiv r(t), \varphi \equiv \varphi(t), \psi \equiv \psi(t)$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$
\begin{aligned}
c(t) &= (r\cos(\varphi)\cos(\psi), r\sin(\varphi)\cos(\psi), r\sin(\psi))^T \qquad \text{für } a \le t \le b \\
L(c) &= \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\psi) + r^2\dot{\psi}^2}\, dt.
\end{aligned}
$$

$\square$

Beispiel: Kardioide in Polarkoordinaten.

Betrachte die Kardioide (Herzlinie) in Polarkoordinaten:

$$r = a(1 + \cos(\varphi)) \qquad \text{für } a > 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Für den Umfang (d.h. Bogenlänge) der Kardioide gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + a^2(1 + \cos(\varphi))^2}\, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos \frac{\varphi}{2}\right| \, d\varphi = 8a$$

□

Die von einer Kurve umschlossene Fläche.

Satz: *Für die von einer* C^1*-Kurve* $c(t) = (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2$ *überstrichene Fläche gilt:*

$$F(c) = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\ dt$$

Beweisskizze: Summiere für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ über die Flächen

$$|F_i| = \frac{1}{2}\|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \qquad \text{für } 0 \le i \le m-1.$$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright F(Z) \quad &= \quad \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i}\,\Delta t_i \\
&= \quad \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(x_i\,\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i\right)\,\Delta t_i \\
&\to \quad \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\ dt. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel: Die Archimedische Spirale.

Die Archimedische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$x = a\,\varphi\,\cos(\varphi), \quad y = a\,\varphi\,\sin(\varphi), \qquad \text{für } a > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs (Bogenlänge) und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2}\, d\varphi \\ &= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \log\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 4.158a \end{aligned}$$

und mit

$$x\dot{y} - \dot{x}y = r^2\dot{\varphi}$$

gilt

$$F = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2\, d\varphi \approx 1.292a^2.$$

$\square$

10.3 Kurvenintegrale

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, *eine stetige Funktion und* $c : [a, b] \to D$ *eine stückweise* C^1*-Kurve. Dann wird das* Kurvenintegral *(*Linienintegral*) von* $f(x)$ *längs* c *definiert durch*

$$\int_c f(x)\,ds := \int_a^b f(c(t))\,\|\dot{c}(t)\|\,dt.$$

Notation: Für eine **geschlossene** Kurve c schreibt man auch

$$\oint_c f(s)\,ds.$$

Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen.

Satz: *Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.*

Beweis: Für einen Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ einer Kurve c gilt

$$\begin{aligned}
\int_{c \circ h} f(x)\, ds &= \int_\alpha^\beta f(c(h(\tau))) \left\| \frac{d}{d\tau} c(h(\tau)) \right\| \, d\tau \\
&= \int_\alpha^\beta f(c(h(\tau))) \, \|\dot{c}(h(\tau))\| \, h'(\tau) \, d\tau \\
&= \int_a^b f(c(t)) \, \|\dot{c}(t)\| \, dt \\
&= \int_c f(x)\, ds
\end{aligned}$$

■

Beispiel. Betrachte einen krummlinigen mit Masse belegten Draht, beschrieben durch eine C^1-Kurve c und mit der (inhomogenen) Massendichte ρ.

- Für die Gesamtmasse des Drahtes bekommt man

$$\int_c \rho(x)\, ds := \int_a^b \rho(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt.$$

- Der Schwerpunkt des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x) x\, ds}{\int_c \rho(x)\, ds}$$

- Das Trägheitsmoment des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x) r^2(x)\, ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist. □