Parameterabhängige uneigentliche Integrale.

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \text{für } x \in I.$$

Beispiel: Die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Definition: *Das uneigentliche Integral*

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \textit{für } x \in I$$

heißt gleichmäßig konvergent*, falls es zu* $\varepsilon > 0$ *eine Konstante* $C > a$ *gibt mit*

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon \qquad \textit{für alle } x \in I \textit{ und für alle } y_1, y_2 \geq C.$$

□

Das Majorantenkriterium.

Bemerkung: Es gilt das `Majorantenkriterium`, wonach das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

gleichmäßig und absolut konvergiert, falls es eine (gleichmäßige) Majorante $g(y)$ von $f(x,y)$ gibt mit

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty \qquad \text{für alle } x,y \in I.$$

Beweis:

$$\left|\int_a^\infty f(x,y)\,dy\right| \leq \int_a^\infty |f(x,y)|\,dy \leq \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty.$$

■

Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz.

Satz: *Sei $f(x, y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar. Weiterhin seien die uneigentlichen Integrale*

$$F(x) := \int_a^\infty f(x, y)\, dy \quad \textit{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy$$

auf (allen) kompakten Teilmengen von I gleichmäßig konvergent. Dann ist $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen, d.h. es gilt

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Beweis: Analog wie im Fall von eigentlichen Integralen. □

Beispiel: Die Ableitung der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \cdot \log(t)\, dt.$$

10 Anwendungen der Integralrechnung

10.1 Rotationskörper

Betrachte für eine Funktion $f(x)$ die Rotation des Funktionsgraphen $y = f(x)$ um die x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Dann gilt für die Querschnittsfläche

$$Q(x) = \pi (f(x))^2 \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Damit ergibt sich für den entstehenden `Rotationskörper` die Volumenformel

$$V_{\text{rot}} = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die jeweils gleiche Querschnittsfläche, so stimmen ihre Volumina überein. □

Beispiel. Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{mit } a, b > 0$$

um die x-Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{\text{rot}} &= \pi \int_{-a}^{a} \left[b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx \\ &= \frac{4}{3}\pi a b^2. \end{aligned}$$

Speziell bekommt man für $a = b = r$ das Volumen

$$V_{\text{rot}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

der Kugel um Null mit Radius $r > 0$. $\square$

Die Oberfläche eines Rotationskörpers.

Für die Oberfläche (Mantelfläche) eines Rotationskörpers gilt die Formel

$$O_{\text{rot}} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

□

Beispiel: Für die Oberfläche der Kugel um Null mit Radius $r > 0$ gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{\text{rot}} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2.$$

□

10.2 Kurven und Bogenlänge

Definition: *Sei* $c = (c_1, \ldots, c_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine stetige Funktion.*

- *Dann wird* c *als* Kurve *im* $\mathbb{R}^n$ *bezeichnet;* $c(a)$ *heißt* Anfangspunkt, $c(b)$ *heißt* Endpunkt *von* c. c *heißt* geschlossene Kurve, *falls* $c(a) = c(b)$.
- *Falls* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine* C^1*-Funktion, d.h. jede Koordinatenfunktion* $c_j(t)$ *ist stetig differenzierbar, so heißt* $c(t)$ *eine* C^1-Kurve.
- $c(t)$ *heißt* stückweise C^1-Kurve, *falls es eine Zerlegung*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

gibt, so dass $c(t)$ *auf jedem Teilintervall* $[t_j, t_{j+1}]$ *eine* C^1*-Funktion ist.*

- *Die Kurve* c *heißt* glatt, *falls*

$$\frac{d}{dt} c(t) := \dot{c}(t) = (c_1'(t), \ldots, c_n'(t))^T \neq 0 \qquad \text{für alle } t \in [a, b].$$

$\square$

Beispiele:

- Die Kurve
$$c(t) := (\cos(t), \sin(t))^T \qquad t \in [0, 2\pi]$$
beschreibt einen **Kreis** im $\mathbb{R}^2$.

- Die Kurve
$$c(t) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))^T$$
beschreibt eine **Zykloide**.
Wegen
$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos(t)), r\sin(t))^T$$
ist die Kurve an den Stellen $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt.

- Die Kurve
$$c(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t), ht)^T \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$
beschreibt eine **Schraubenlinie** (**Helix**) mit Radius r und **Ganghöhe** h.

Umparametrisierung von Kurven.

Ist $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die Kurve

$$(c \circ h)(\tau) = c(h(\tau)) \qquad \text{für } \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und den gleichen Durchlaufsinn wie die Kurve c.

Bemerkungen:

- Man nennt $t = h(\tau)$ eine `Umparametrisierung` (`Parameterwechsel`). Die Kurven c und $c \circ h$ werden als gleich angesehen.
- Im Fall einer C^1-Kurve werden nur C^1-Parameterwechsel zugelassen.
- Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ beschreibt eine Kurve mit

$$c(x) := (x, f(x))^T \qquad \text{für } a \leq x \leq b$$

bzw. $c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T$ für $0 \leq t \leq 1$.

Die Bogenlänge einer Kurve.

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

eine untere Schranke für die `Bogenlänge` der Kurve $c(t)$.

Definition: *Ist die Menge* $\{L(Z) \,:\, Z \in \mathbf{z}[a, b]\}$ *nach oben beschränkt, so heißt die Kurve* c `rektifizierbar`*, und in diesem Fall ist*

$$L(c) := \sup\{L(Z) \,:\, Z \in \mathbf{z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \to 0} L(Z)$$

die `Länge` *der Kurve* c. $\square$

Berechnung der Bogenlänge einer C^1-Kurve.

Satz: *Jede C^1-Kurve ist rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beweisidee: *Zunächst gilt die Darstellung*

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, so dass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = c_k'(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

somit

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k'(\tau_{k_j}))^2} \cdot (t_{j+1} - t_j) \right). \qquad \blacksquare$$

Beispiel.

Berechnen die Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))^T \qquad \text{für } 0 \le t \le 2\pi$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (r(1 - \cos(t)), r\sin(t))^T \\ \|\dot{c}(t)\| &= r\sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = 2r\sin(t/2) \\ L(c) &= 2r\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\, dt = 8r \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1–Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung, denn es gilt

$$L(c \circ h) = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\|\, d\tau = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))\|h'(\tau)\, d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\, dt = L(c)$$

$\square$