9.5 Uneigentliche Integrale

Ziel: Berechne `uneigentliche Integrale`, d.h.

- Integrale über unbeschränkten Bereichen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

- Integrale über unbeschränkten Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{wobei } f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ stetig} \quad \text{oder} \quad f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subset \mathbb{R}$ *heißt* `lokal integrierbar`*, falls* f *über jedem kompakten Teilintervall* $[a, b] \subset D$ *integrierbar ist.* $\square$

Definition: *Ist eine Funktion* $f(x)$ *lokal integrierbar über* $[a, \infty)$ *bzw.* $(-\infty, b]$ *bzw.* $(-\infty, \infty)$*, so definiert man*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{y\to-\infty} \int_y^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx \quad := \quad \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ bzw. (a, b), so definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{für } c \in (a, b).$$

Ein Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha > 1 \\ \log(|x|) + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$. ■

Ein weiteres Beispiel. Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx.$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx = -\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx,$$

und weiterhin

$$\begin{aligned}\int_0^y x e^{-x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{y^2} e^{-u}\, du && \text{mit } u = x^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-y^2}\right) \to \frac{1}{2} && \text{für } y \to \infty.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx = 1$$

■

Konvergenzkriterien.

Satz: *Sei* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar. Dann gilt:*

(a) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *existiert genau dann, wenn gilt*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;:\; \exists\,C > a \;:\; \forall\,z_1, z_2 > C \;:\; \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

(b) Ist das uneigentliche Integral `absolut konvergent`*, d.h.*

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

konvergiert, so konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

$\square$

Majorantenkriterium.

Satz: *Sei* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar. Dann gilt:*

(c)

$$\forall\, x \;:\; |f(x)| \leq g(x) \;\; \textit{und} \;\; \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{konvergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{absolut konvergent}$$

(d) Weiterhin gilt folgende Umkehrung:

$$\forall\, x \;:\; 0 \leq g(x) \leq f(x) \;\; \textit{und} \;\; \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{divergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{divergent.}$$

□

Beispiel: Das Dirichlet-Integral

Betrachte das Dirichlet-Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Das Dirichlet-Integral ist konvergent, denn es gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = -\frac{\cos(x)}{x}\bigg|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

und somit

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{y_1} \to 0 \quad \text{für } y_1 \to \infty.$$

$\square$

Bemerkungen:

- Das Dirichlet-Integral ist *nicht* absolut konvergent;
- Das Dirichlet-Integral besitzt den Wert $I = \pi/2$. $\square$

Beispiel: Das Exponentialintegral

- Betrachte das `Exponentialintegral`

$$\text{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad \text{für } x < 0.$$

Wegen $\lim_{t\to-\infty} te^t = 0$ gibt es ein $C > 0$ mit $|te^t| \leq C$ für alle $t \in (-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left|\frac{e^t}{t}\right| = \frac{|te^t|}{t^2} \leq \frac{C}{t^2}.$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\, dt$$

folgt die *absolute Konvergenz* des Exponentialintegrals $\text{Ei}(x)$ für alle $x < 0$ aus dem Majorantenkriterium. ■

Beispiel: Die Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad \text{für } x > 0.$$

Beachte: Für $0 < x < 1$ ist der Integrand von $\Gamma(x)$ singulär. Mit

$$\left| e^{-t} t^{x-1} \right| \leq t^{x-1} \qquad \text{für } 0 < t \leq 1$$

folgt jedoch in diesem Fall

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x}(1 - \varepsilon^x) \longrightarrow \frac{1}{x} \qquad \text{für } \varepsilon \to 0+.$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral:

$$\left| e^{-t} t^{x-1} \right| = \left| \frac{e^{-t} t^{x+1}}{t^2} \right| \leq \frac{C}{t^2} \qquad \text{für } 1 \leq t \leq \infty.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\Gamma(x)$ für $x > 0$.

Weitere Bemerkungen zur Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(1) = 1.$$

□

Folgerung: Es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

■

9.6 Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Zunächst: Parameterabhängige *eigentliche* Integrale.

Sei $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, so dass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a,b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy.$$

Fragen:

- Ist die Funktion $F(x)$ *stetig*, wenn $f(x,y)$ stetig ist?
- Ist die Funktion $F(x)$ *differenzierbar*, wenn $f(x,y)$ nach x differenzierbar?

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: *Ist* $f(x, y)$ *stetig auf* $I \times [a, b]$*, so existiert das Integral*

$$F(x) := \int_a^b f(x, y)\, dy$$

für alle $x \in I$*, und* $F(x)$ *ist stetig auf* I*.*

Beweis: Sei $x_0 \in I_0 \subset I$, so dass $I_0 \subset I$ kompakt. Dann ist $f(x, y)$ auf dem Kompaktum $I_0 \times [a, b]$ gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon \qquad \text{für } x, x_0 \in I_0 \text{ und alle } y \in [a, b].$$

Mit diesem δ und $|x - x_0| < \delta$ für $x, x_0 \in I_0$ folgt dann

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x_0, y))\, dy \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x_0, y)|\, dy < \varepsilon(b - a).$$

Somit ist F stetig in x_0. Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I stetig. ■

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: *Ist* $f(x, y)$ *stetig auf* $I \times [a, b]$ *und nach* x *stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch* $F(x)$ *auf dem Intervall* I *stetig differenzierbar, und es gilt*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Beweis: Für $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, folgt mit dem Mittelwertsatz

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}\, dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\, dy \qquad \text{für ein } \xi \in [x_0, x],$$

und damit weiterhin

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \lim_{\xi \to x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)\, dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)\, dy.$$

Somit ist F differenzierbar in x_0.

Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I differenzierbar. ■

Zwei Beispiele.

Beispiel 1:

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,dt \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\,dt.$$

Beispiel 2: Die Bessel-Funktion

$$\begin{aligned} J_n(x) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t) - nt)\,dt, \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}, \\ J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cdot\sin(x\sin(t) - nt)\,dt, \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\cdot\cos(x\sin(t) - nt)\,dt. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bessel-Funktion $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, ist (eine) Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Übung (mit partieller Integration). □