Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig,* $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar und* $p(x) \geq 0$ *für* $a \leq x \leq b$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b p(x)\,dx.$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a,b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a,b]) \cdot p(x).$$

Integration über $[a, b]$ liefert:

$$\min(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq \max(f[a,b]) \cdot \int_a^b p(x)\,dx.$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. ■

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p \equiv 1$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Beobachtung: Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt der `Mittelwertsatz der Differentialrechnung` für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \qquad \text{für ein } \xi \in [a, b].$$

□

Der Satz von Taylor. Man erhält die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um x_0 durch n-fache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)^1 f''(t)\,dt \\
&= (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f'''(t)\,dt \\
&\vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Daraus bekommt man die Lagrange-Restgliedformel aus Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].$$

9.4 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration rationaler Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Methode: Partialbruch-Zerlegung von rationaler Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$\begin{aligned}
R(x) &= p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1}\left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}}\right] \\
&\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2}\left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}}\right]
\end{aligned}$$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg(p) \geq \deg(q).$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.

- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j;
  - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

Ansatz der Partialbruch-Zerlegung.

$$\begin{aligned} R(x) \quad &= \quad p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x - x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen:

$$\begin{aligned} &\alpha_{j\ell}, && j = 1, \ldots, n_1,\ \ell = 1, \ldots, k_j; \\ &\gamma_{j\ell}, && j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ \ell = 1, \ldots, k_j; \\ &\delta_{j\ell}, && j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ \ell = 1, \ldots, k_j. \end{aligned}$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel. Betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

- Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

- Ausmultiplizieren:

$$1 - x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

- Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

Typ I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

Typ II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x-x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \dfrac{1}{1-\ell} \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ III:

$$I_\ell := \int \frac{1}{(x^2+1)^\ell}\,dx \qquad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

- Für $\ell = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$

- Für $\ell > 1$ kann man I_ℓ wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots.$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx &= \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}I_{\ell-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell \\ &= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell\end{aligned}$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots. \quad \blacksquare$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx = \frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx + (d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}$$

- Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} \qquad \text{mit } u=(x-a)^2+b^2.$$

$$= \begin{cases} \log\left(|(x-a)^2+b^2|\right)+C & \text{für } \ell=1 \\ \dfrac{1}{1-\ell}\cdot\dfrac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell-1}}+C & \text{für } \ell=2,3,\ldots. \end{cases}$$

- Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell} = \frac{1}{b^{2\ell-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^\ell} \qquad \text{mit} \quad t=\frac{x-a}{b}.$$

Beispiel.

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}$$

Somit bekommt man

$$\int R(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\log(|x|)-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\arctan(x)+C$$

$\blacksquare$

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in
$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$
- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
und somit durch Substitution in
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

□