

Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $p(x) \geq 0$ für $a \leq x \leq b$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b p(x) \, dx.$$

Beweis: Da $f(x)$ stetig und $p(x) \geq 0$ folgt:

$$\min(f[a, b]) \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq \max(f[a, b]) \cdot p(x).$$

Integration über $[a, b]$ liefert:

$$\min(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x) \, dx \leq \int_a^b f(x)p(x) \, dx \leq \max(f[a, b]) \cdot \int_a^b p(x) \, dx.$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. ■

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Spezialfall.

Für den Spezialfall $p \equiv 1$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Beobachtung: Schreibt man diese Beziehung als

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so folgt der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** für die Stammfunktion $F(x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \quad \text{für ein } \xi \in [a, b].$$

□

Der Satz von Taylor. Man erhält die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f \in C^{n+1}$ um x_0 durch n -fache partielle Integration:

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) \, dt = \int_{x_0}^x (x-t)^0 f'(t) \, dt \\
 &= (x-x_0)f'(x_0) + \int_{x_0}^x (x-t)^1 f''(t) \, dt \\
 &= (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-t)^2 f'''(t) \, dt \\
 &\quad \vdots \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt.
 \end{aligned}$$

Daraus bekommt man die Lagrange-Restgliedformel aus Mittelwertsatz:

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \, dt = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in [x_0, x].$$

9.4 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration **rationaler Funktionen**

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k.$$

Methode: **Partialbruch-Zerlegung** von rationaler Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x - x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right] + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]$$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg(p) \geq \deg(q).$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit **Polynomdivision**, und es gilt

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.

- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
 - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j ;
 - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

Ansatz der Partialbruch-Zerlegung.

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \dots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]$$

Unbekannte **Parameter**, die bestimmt werden müssen:

$$\alpha_{j\ell}, \quad j = 1, \dots, n_1, \ell = 1, \dots, k_j;$$

$$\gamma_{j\ell}, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2, \ell = 1, \dots, k_j;$$

$$\delta_{j\ell}, \quad j = n_1 + 1, \dots, n_2, \ell = 1, \dots, k_j.$$

Diese Parameter werden durch **Koeffizientenvergleich** berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel. Betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

• Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2 + 1} \\ \Rightarrow 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

• Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1 + \gamma_1)x^3 + (\alpha_2 + \delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

• Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

• Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

Typ I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^s c_k x^k dx = \sum_{k=0}^s \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

Typ II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x - x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x - x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \frac{1}{1 - \ell} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ III:

$$I_\ell := \int \frac{1}{(x^2 + 1)^\ell} dx \quad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

- Für $\ell = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + C$$

- Für $\ell > 1$ kann man I_ℓ wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$I_\ell = \frac{1}{2(1 - \ell)} \left[(3 - 2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^{\ell-1}} \right] \quad \text{für } \ell = 2, 3, \dots$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^\ell} dx &= \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{u^{\ell-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{(x^2 + 1)^{\ell-1}} + C \end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned} I_{\ell-1} &= \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{\ell-1}} dx = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^\ell} dx = \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + 1)^\ell} dx + I_\ell \\ &= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2 + 1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)} \cdot I_{\ell-1} + I_\ell \end{aligned}$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)} \left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^{\ell-1}} \right] \quad \text{für } \ell = 2, 3, \dots \quad \blacksquare$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx + d}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} dx = \frac{c}{2} \int \frac{2(x - a)}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} dx + (d + ca) \int \frac{dx}{((x - a)^2 + b^2)^\ell}$$

• Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x - a)}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} dx = \int \frac{du}{u^\ell} \quad \text{mit } u = (x - a)^2 + b^2.$$

$$= \begin{cases} \log(|(x - a)^2 + b^2|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \frac{1}{1 - \ell} \cdot \frac{1}{((x - a)^2 + b^2)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \dots \end{cases}$$

• Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{((x - a)^2 + b^2)^\ell} = \frac{1}{b^{2\ell-1}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^\ell} \quad \text{mit } t = \frac{x - a}{b}.$$

Beispiel.

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned} \int R(x) \, dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\log(|x|) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \arctan(x) + C \end{aligned}$$



Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt$$

- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

und somit durch Substitution in

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt$$

□