## 8.2 Potenzreihen

**Definition:** *Eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \textit{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

*heißt* `(komplexe) Potenzreihe` *zum Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$. $\square$

**Beispiel:** Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

**Weiterhin:** Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\log(z), \cos(z), \sin(z), \ldots$$

## Taylor-Reihenentwicklung.

Betrachte für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$, die `Taylor-Reihe`

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}.$$

## Bemerkungen.

- Die Taylor-Reihe einer $C^\infty$-Funktion ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.
- Konvergiert die Taylor-Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

so nennt man die Funktion $f$ `reell-analytisch`. □

# Konvergenzradius einer Potenzreihe.

**Satz:** *Zu jeder Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad \textit{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

*gibt es eine Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften*

$$|z-z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad \textit{absolut konvergent}$$

$$|z-z_0| > r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad \textit{divergent}$$

*Die Zahl $r \geq 0$ heißt* `Konvergenzradius` *der Potenzreihe.*

*Die Potenzreihe konvergiert für alle $\rho$ mit $0 \leq \rho < r$ auf*

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq \rho\}$$

*sogar gleichmäßig.*

**Beweis:** Definiere

$$r := \sup \left\{ |w| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \text{ konvergent} \right\}$$

- Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe divergent.
- Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe nur für $z = z_0$ (absolut) konvergent.
- Sei nun $r > 0$ und $0 < \rho < r$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \rho$, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

konvergiert. Insbesondere ist die Folge $(a_k w^k)_{k \geq 0}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Schranke $M > 0$ mit

$$\left| a_k w^k \right| \leq M \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho < |w|$ gilt somit

$$\left|a_k(z - z_0)^k\right| = \left|a_k w^k\right| \left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k \leq M \left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k$$

und weiterhin

$$\left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k \leq \left|\frac{z - z_0}{w}\right| < 1 \qquad \text{für alle } k \geq 1,$$

so dass die `geometrische Reihe`

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{w}\right|^k$$

konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

absolut und gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho$. ■

# Die Formel von Cauchy-Hadamard.

**Satz:** *Den Konvergenzradius* $r \geq 0$ *einer Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

*kann man mit der* `Formel von Cauchy-Hadamard` *berechnen:*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

**Beweis:** Verwende hierzu das Wurzelkriterium, zusammen mit der Äquivalenz

$$\begin{aligned}
\forall k \geq k_0 : \sqrt[k]{\left|a_k (z - z_0)^k\right|} \leq q < 1 \quad & \Longleftrightarrow \quad \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left|a_k (z - z_0)^k\right|} < 1 \\
& \Longleftrightarrow \quad \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}\, |z - z_0| < 1 \\
& \Longleftrightarrow \quad |z - z_0| < \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

# Konvergenz von Potenzreihen.

**Satz:** *Für eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *gelten folgende Aussagen.*

*(a) Falls einer der beiden Grenzwerte*

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \quad \textit{oder} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

*existiert (oder falls $r = \infty$), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.*

*(b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1},$$

*deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius $r$ der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$.*

**Beweis:** Der erste Teil von (a) folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard.

Verwende für den zweiten Teil von (a) das Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k} \right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z-z_0| \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k} \right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |z-z_0| < \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

■

Zu Teil (b): Berechne den Konvergenzradius mit Cauchy-Hadamard, womit

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

wegen $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$. Somit sind die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen identisch. ■

## Beispiele.

- Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z = 0$, denn $(k!z^k)_{k\geq 0}$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge. Der Konvergenzradius ist in diesem Fall $r = 0$.
- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.
- Die Exponentialreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.
- Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots \qquad \text{für } |z| < 1 \\
\frac{1}{(1-z)^3} &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2}\left(2 + 6z + 12z^2 + \ldots\right) \qquad \text{für } |z| < 1
\end{aligned}
$$

# Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.

- **Beachte:** Die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

- **Anwendung:** Die Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad \text{für } |z| < 1.$$

liefert eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

# Potenzreihenentwicklung von `arctan`.

- **Weitere Anwendung:** Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx}\,\text{arctan}(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

  liefert Potenzreihenentwicklung

$$\text{arctan}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1.$$

# Bemerkungen:

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind $C^\infty$-Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer `Taylor-Reihe` überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \qquad \text{für } |x - x_0| < r$$

# Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz.

- Identitätssatz für Potenzreihen: Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt

$$a_k = b_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Abelscher Grenzwertsatz: Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, insbesondere in den Randpunkten ihres Konvergenzintervalls. □

## Beispiel.

Die Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\log(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\log(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

$\square$

# Rechenregeln für Potenzreihen.

**Satz:** *Seien*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \textit{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

*Potenzreihen mit den Konvergenzradien* $r_1 > 0$ *und* $r_2 > 0$. *Dann gilt:*

*(a)*

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k, \qquad \textit{für } |z| < \min(r_1, r_2);$$

*(b)*

$$\lambda \cdot f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k, \qquad \textit{für } |z| < r_1 \textit{ und mit } \lambda \in \mathbb{C};$$

*(c)* Cauchy-Produkt für Potenzreihen

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell} \right) z^k, \qquad \textit{für } |z| < \min(r_1, r_2). \qquad \square$$

# Weitere Rechenregeln für Potenzreihen.

**Satz:** *Seien* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *und* $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *Potenzreihen. Dann:*

*(d) Ist* $f(0) = 0$*, so läßt sich die Potenzreihe* $f(z)$ *in die Potenzreihe* $g(z)$ *einsetzen, d.h. es gibt ein* $r_3 > 0$ *und eindeutige Koeffizienten* $c_k \in \mathbb{C}$ *mit*

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \qquad \textit{für } |z| < r_3;$$

*(e) Ist* $f(0) \neq 0$*, so besitzt die Funktion* $1/f(z)$ *eine Potenzreihenentwicklung, d.h. es gibt ein* $r_4 > 0$ *und eindeutige Koeffizienten* $d_k \in \mathbb{C}$ *mit*

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \qquad \textit{für } |z| < r_4;$$

*die sich nach dem Cauchy-Produkt in (c) wie folgt rekursiv berechnen.*

$$a_0 d_0 = 1, \qquad a_0 d_k = -\sum_{\ell=0}^{k-1} d_\ell a_{k-\ell}, \qquad \textit{für } k = 1, 2, \ldots. \qquad \square$$

# Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

**Beispiel 1.** Wir definieren den cosinus hyperbolicus für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und ersetzen $e^x$ durch die Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Analog erhält für $x \in \mathbb{R}$ den sinus hyperbolicus mit

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

# Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

**Beispiel 2.** Für

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}, \qquad -1 < x < 1,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell}\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots\right) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) \\
&= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right) x^3 \\
&\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right) x^4 + \ldots \qquad \text{für } -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

$\square$