
Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2015

1

Informationsquellen

Informationsquellen.

- **Internet**

www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/15/

- **Vorlesung**

Mittwoch, 08:00–09:30, Audimax 1, ab 1.4.2015

Freitag, 13:15–14:45, Audimax 1, ab 10.4.2015

- **Übungen in Tutorgruppen**

Dr. Kai Rothe und Übungsgruppenleiter(innen)

- **Hörsaalübung**

Dr. Kai Rothe.

Montag, 15:00–16:30, Audimax 2, ab 13.4.2015

Dienstag, 15:00–16:30, Audimax 2, ab 7.4.2015

- **Sprechstunde**

Prof. Reis:

Freitag, SBS 95-E, Raum 3.079, 11:00–12:00.

2

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:
Mathematik für Ingenieure 1,
4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.
- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:
Aufgaben und Lösungen zu Mathematik für Ingenieure 1,
4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2.
Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure,
Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Literaturquellen.

SEKUNDÄR (cont.):

- G. Bärwolff: Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure.
Elsevier, Spektrum Akad. Verl., München 2006
- H. Neunzert, W. Eschmann, A. Blickensdörfer, K. Schelkes: Analysis 1 Ein Lehr- und
Arbeitsbuch für Studienanfänger
Springer, Berlin, 1993.
- N. Herrmann: Höhere Mathematik
Oldenbourg, München, 2009.

Inhalte Analysis II.

- Fixpunkt-Iteration
- Potenzreihen
- Elementare Funktionen
- Integration
- Kurven und Kurvenintegrale
- Periodische Funktionen, Fourier-Reihen
- Interpolation
- Numerische Quadratur

7 Fixpunkt-Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton-Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots,$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt-Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0 , so dass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi \left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right) = \Phi(x^*).$$

Grundidee der Fixpunkt-Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das **Fixpunkt-Problem**

$$x = \Phi(x)$$

mit der **Fixpunkt-Iteration**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel: Newton-Iteration. Hierbei ist

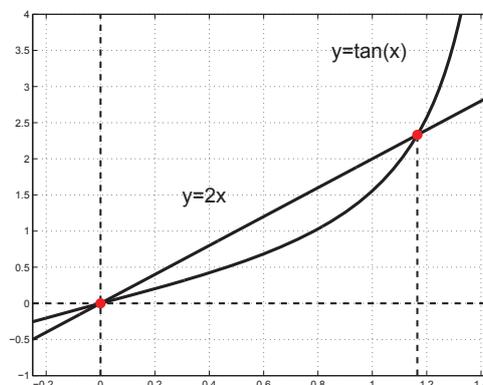
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

ABER: Verfahrensfunktion Φ ist im Allgemeinen nicht eindeutig!

Beispiel.

Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) = 2x - \tan(x).$$



Lösungsmöglichkeiten:

- Iteration mit $x = \frac{1}{2} \tan x = \Phi_1(x)$
- Iteration mit $x = \arctan(2x) = \Phi_2(x)$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt-Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \tan(x_k) \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan(2y_k)$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert für $k \rightarrow \infty$, aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Bemerkung: Die **Konvergenzgeschwindigkeit** hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Definition: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung $\Phi : D \rightarrow V$, $D \subset V$, heißt **Lipschitz-stetig** auf D , falls eine Konstante L existiert, so dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L nennt man **Lipschitz-Konstante**. □

Definition: Eine Abbildung $\Phi : D \rightarrow V$, $D \subset V$, heißt **kontrahierend**, falls Φ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$. Man nennt in diesem Fall L die **Kontraktionskonstante** von Φ . □

Bemerkungen:

- Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \quad \text{für alle } x \neq y$$

gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend. □

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} mit $L = 1$.

Satz: Jede C^1 -Funktion $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ mit der Lipschitz-Konstanten

$$L = \sup\{|\Phi'(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)| |x - y| \leq L |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$



Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz-stetig auf \mathbb{R} mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\log(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[1, \infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist **nicht** Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$.

Satz (Banachscher Fixpunktsatz):

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger normierter Raum (Banachraum). Weiterhin sei $D \subset V$, $D \neq \emptyset$, abgeschlossen und $\Phi : D \rightarrow D$ eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionskonstante $L < 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Es gibt genau einen **Fixpunkt** x^* von Φ in D , d.h. $\Phi(x^*) = x^*$;
 (b) Für jeden Startwert $x_0 \in D$ konvergiert die **Fixpunkt-Iteration**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

gegen den Fixpunkt x^* ;

- (c) Es gilt die **a priori-Fehlerabschätzung**

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|;$$

und die **a posteriori-Fehlerabschätzung**

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Beweis: (b): Sei $x_0 \in D$ beliebig. Dann gilt $x_k = \Phi(x_{k-1}) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Somit ist $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in D , wobei gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\|.$$

und somit

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^{k+1-n} \|x_n - x_{n-1}\| \quad \text{für } k \geq n.$$

Für $m \geq n \geq k$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n)\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} L^{k+1-n} \right) \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} L^j \right) \|x_n - x_{n-1}\| = \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Weiterhin

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|.$$

womit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\| = 0.$$

$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge mit Grenzwert $x^* \in D$, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.

Wegen der Stetigkeit von Φ und mit $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ folgt daraus $x^* = \Phi(x^*)$.

(a): Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^* \neq x^{**}$.

Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \leq L\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|.$$

(c): Folgt sofort mit

$$\|x^* - x_n\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|.$$



Beispiel. Berechne Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.

Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen;
- es gilt $0 < \Phi(x) \leq 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$;
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \leq e/10 < 1$ für alle $x \in D$;
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Setze $x_0 = 1$. Dann bekommt man $x_1 = 0.2718281828 \dots$, und es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq 11.$$

8 Potenzreihen und elementare Funktionen

8.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ für $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

- **punktweise** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z), \quad \text{für alle } z \in D.$$

- **gleichmäßig** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

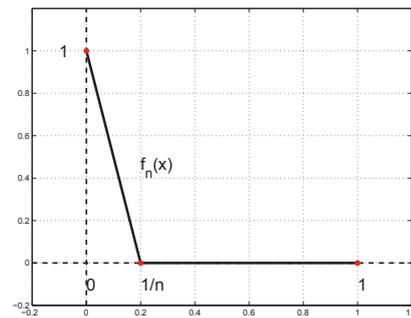
□

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

□

Gegenbeispiel. Betrachte die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$



Der Graph von $f_n(x)$.

Die Folge konvergiert *punktweise* gegen die *unstetige* Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ *nicht* gleichmäßig gegen f , denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Satz: Falls eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, gleichmäßig auf D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f stetig auf D .

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, so dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $z \in D$ mit $\|z - z_0\| < \delta$. ■

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, und gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D .

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left| \sum_{n=0}^m f_n(z) - f(z) \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen. ■

Folgerung: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig konvergiert auf D . Dann ist f stetig auf D . □

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation.

Satz: Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x), \quad \text{für } x \in (a, b),$$

gleichmäßig konvergent auf (a, b) sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a, b) , und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

□