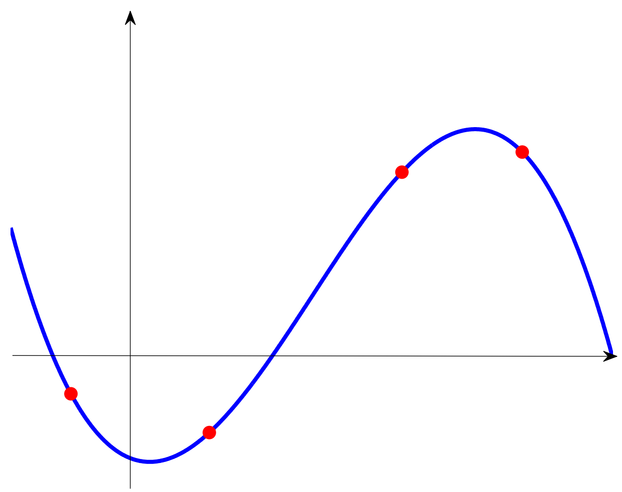
12 Interpolation durch Polynome

12.1 Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an $n + 1$ Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n.$$

Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \cdots, (x_n, f_n)$.

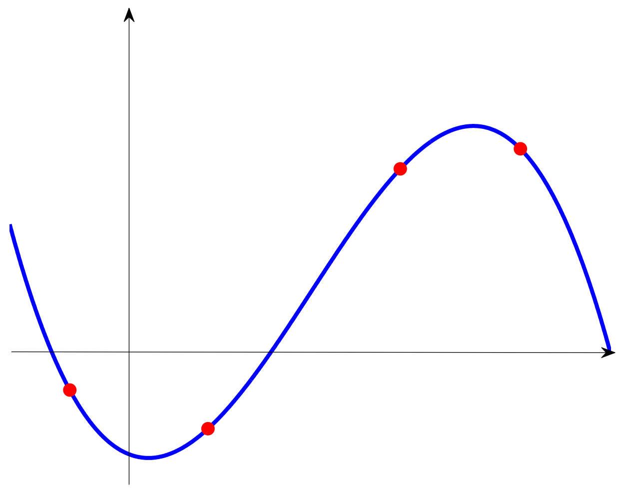


Gegebene Daten (x_j, f_j)**.**

Gesucht: *Einfache* Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Daten `interpoliert`, d.h.

$$p(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } i = 0, 1, \ldots, n,$$

z.B.: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.



Gegebene Daten (x_j, f_j).

Fragen:

- Gibt es so ein p? Falls ja, ist p eindeutig?
- Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p?

Klassische Polynom-Interpolation.

Bestimme ein Polynom (höchstens) n-ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

das die gegebenen Daten interpoliert, so dass $p_n(x_i) = f_i$, $0 \leq i \leq n$.

Erster Lösungsansatz: Die Interpolationsbedingungen ergeben lineares System

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= f_1 \\ &\vdots \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= f_n \end{aligned}$$

Setze:

$X = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $f\big|_X = (f_0, \ldots, f_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $a = (a_0, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Vandermonde-Matrix.

Die Koeffizientenmatrix des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},$$

kurz

$$V \cdot a = f\big|_X,$$

heißt `Vandermonde-Matrix`.

Satz: *Für die Determinante der Vandermonde-Matrix* $V \equiv V(x_0, \dots, x_n)$ *gilt*

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Beweis: Durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang: $n = 1$: $\det(V(x_0, x_1)) = x_1 - x_0$.

Induktionsschritt: $n - 1 \to n$.

$$\det\left(V(x_0, \dots, x_n)\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_0 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0 x_1 & \cdots & x_1^n - x_0 x_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0 x_n & \cdots & x_n^n - x_0 x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 - x_0) \cdots (x_n - x_0) \cdot \det\left(V(x_1, \dots, x_n)\right) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i). \qquad \blacksquare$$

Existenz und Eindeutigkeit der Interpolation.

Folgerung: Falls Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschieden, so ist V regulär.

Satz: *Zu paarweise verschiedenen Stützstellen*

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$$

und Funktionswerten

$$f_0, f_1 \ldots, f_n \in \mathbb{R}$$

gibt es genau ein interpolierendes Polynom p_n *vom Höchstgrad* n *mit*

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \textit{für alle } 0 \leq i \leq n.$$

■

ABER: Wir berechnen die Lösung **nicht** über das lineare System $V \cdot a = f\big|_X$.

DENN: Dies ist zu **teuer** und **instabil**. □

12.2 Interpolationsformel nach Lagrange

Lagrange-Darstellung.

Definieren Lagrange-Polynome

$$L_j(x) := \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1}) \cdot (x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad \text{für } 0 \leq j \leq n.$$

Dann ist L_j ein Polynom vom Grad n, und es gilt

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \qquad \text{für } 0 \leq i, j \leq n.$$

Lösung mit der Lagrange-Darstellung.

Die Interpolationsaufgabe

$$p_n(x_i) = f_i \qquad \text{für alle } 0 \leq i \leq n$$

wird gelöst durch das (eindeutige) Polynom

$$p_n(x) = f_0 L_0(x) + \ldots + f_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x).$$

Die obige Darstellung von p_n heißt Lagrange-Darstellung. □

Beispiel. Betrachte die Daten

x_j	0	1	2	3
f_j	0	0	4	18

Dann sieht die zugehörige Lagrange-Basis wie folgt aus.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \qquad L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

Das interpolierende kubische Polynom p_3 besitzt die Darstellungen

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 4 \cdot L_2(x) + 18 \cdot L_3(x) \\ &= -4 \cdot \frac{x(x-1)(x-3)}{2} + 18 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\ &= x^3 - x^2. \end{aligned}$$

12.3 Der Interpolationsfehler

Gegeben sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sowie das Interpolationspolynom p zu den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Wie "groß" ist die Differenz

$$\varepsilon(x) \quad = \quad f(x) - p_n(x) \ ?$$

Satz: *Sei* $f \in C^{n+1}([a, b])$ *und* $x \in [a, b]$. *Dann gibt es ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Folgerung: *Für den* `Interpolationsfehler` *gilt die Abschätzung*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| .$$

Tschebyscheff-Knoten.

Beachte: Ein Term des Interpolationsfehlers ist das Knotenpolynom

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Optimierungsproblem: Bestimme die Knoten $x_0, x_1, \ldots, x_n$, so dass

$$\max_{x_0,\ldots,x_n \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

minimal auf $[a, b]$.

Lösung: Für das Intervall $[-1, 1]$ sind die Tschebyscheff-Knoten optimal.

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$