Analysis II für

Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg

Sommersemester 2015

Informationsquellen.

- **Internet**

  www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/15/

- **Vorlesung**

  Mittwoch, 08:00–09:30, Audimax 1, ab 1.4.2015

  Freitag, 13:15–14:45, Audimax 1, ab 10.4.2015

- **Übungen in Tutorgruppen**

  Dr. Kai Rothe und Übungsgruppenleiter(innen)

- **Hörsaalübung**

  Dr. Kai Rothe.

  Montag, 15:00–16:30, Audimax 2, ab 13.4.2015

  Dienstag, 15:00–16:30, Audimax 2, ab 7.4.2015

- **Sprechstunde**

  Prof. Reis:

  Freitag, SBS 95-E, Raum 3.079, 11:00–12:00.

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:
  Mathematik für Ingenieure 1,
  4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.

- R. Ansorge, H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar:
  Aufgaben und Lösungen zu Mathematik für Ingenieure 1,
  4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, September 2010.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2.
  Springer, Berlin.

- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure,
  Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Literaturquellen.

SEKUNDÄR (cont.):

- G. Bärwolff: Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure.
  Elsevier, Spektrum Akad. Verl., München 2006

- H. Neunzert, W. Eschmann, A. Blickensdörfer, K. Schelkes: Analysis 1 Ein Lehr- und Arbeitsbuch für Studienanfänger
  Springer, Berlin, 1993.

- N. Herrmann: Höhere Mathematik
  Oldenbourg, München, 2009.

Inhalte Analysis II.

- **Fixpunkt-Iteration**
- **Potenzreihen**
- **Elementare Funktionen**
- **Integration**
- **Kurven und Kurvenintegrale**
- **Periodische Funktionen, Fourier-Reihen**
- **Interpolation**
- **Numerische Quadratur**

7 Fixpunkt-Iteration

Ziel: Iterative Lösung der (nichtlinearen) Gleichung $f(x) = 0$.

Möglichkeiten:

- Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung)
- Newton-Verfahren,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Iteratives Verfahren: Fixpunkt-Iteration mit stetiger Verfahrensfunktion Φ und Startwert x_0 , so dass

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Grenzwert

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Phi(x^*).$$

Grundidee der Fixpunkt-Iteration.

Löse statt $f(x) = 0$ das `Fixpunkt-Problem`

$$x = \Phi(x)$$

mit der `Fixpunkt-Iteration`

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel: `Newton-Iteration`. Hierbei ist

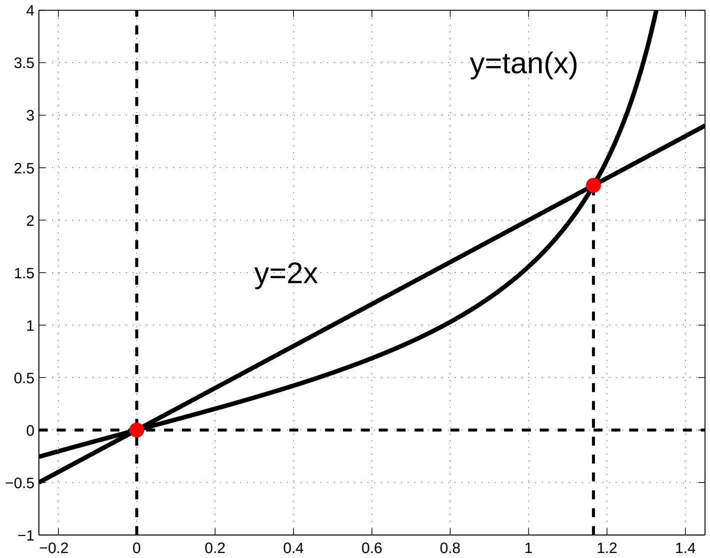
$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

ABER: Verfahrensfunktion Φ ist im Allgemeinen nicht eindeutig!

Beispiel.

Suche im Intervall $(0, \pi/2)$ die (eindeutige) Nullstelle von

$$f(x) = 2x - \tan(x).$$



Lösungsmöglichkeiten:

- Iteration mit $x = \frac{1}{2}\tan x = \Phi_1(x)$
- Iteration mit $x = \arctan(2x) = \Phi_2(x)$

Ergebnisse der beiden Fixpunkt-Iterationen.

- Betrachte Iterationen

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\tan(x_k) \quad \text{und} \quad y_{k+1} = \arctan(2y_k)$$

- Wähle als Anfangsnäherung in beiden Iterationen

$$x_0 = 1.2 \quad \text{und} \quad y_0 = 1.2$$

- Beide Iterationen konvergieren im Grenzwert für $k \to \infty$, aber

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.1655\,61185$$

- Berechne die Iterationen mittels eines Computerprogramms

Bemerkung: Die `Konvergenzgeschwindigkeit` hängt ab vom Abstand

$$|x_{k+1} - x_k|$$

zweier benachbarter Folgenglieder.

Definition: *Sei* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter Vektorraum. Eine Abbildung* $\Phi : D \to V$, $D \subset V$, *heißt* `Lipschitz-stetig` *auf* D, *falls eine Konstante* L *existiert, so dass*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \text{für alle } x, y \in D.$$

Die Konstante L *nennt man* `Lipschitz-Konstante`. □

Definition: *Eine Abbildung* $\Phi : D \to V$, $D \subset V$, *heißt* `kontrahierend`, *falls* Φ *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* $L < 1$. *Man nennt in diesem Fall* L *die* `Kontraktionskonstante` *von* Φ. □

Bemerkungen:

- Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.
- Falls die Abschätzung

  $$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \|x - y\| \qquad \text{für alle } x \neq y$$

  gilt, so ist Φ nicht notwendigerweise kontrahierend. □

Beispiel: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.

Satz: *Jede C^1-Funktion $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ mit der Lipschitz-Konstanten*

$$L = \sup\{|\Phi'(x)| \ : \ a \leq x \leq b\}.$$

Beweis: Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)|\,|x - y| \leq L\,|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$

■

Beispiele:

- Die Sinusfunktion $\sin(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$ mit $L = 1$.
- Der Logarithmus $\log(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $[1, \infty)$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist Lipschitz-stetig auf $(-\infty, 0]$ mit $L = 1$.
- Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ ist **nicht** Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$.

Satz (Banachscher Fixpunktsatz)**:**
Sei $(V, \|\cdot\|)$ *ein vollständiger normierter Raum (*Banachraum*). Weiterhin sei* $D \subset V$*,* $D \neq \emptyset$*, abgeschlossen und* $\Phi : D \to D$ *eine kontrahierende Abbildung mit Kontraktionskonstante* $L < 1$*. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gibt genau einen* Fixpunkt x^* *von* Φ *in* D*, d.h.* $\Phi(x^*) = x^*$*;*

(b) *Für jeden Startwert* $x_0 \in D$ *konvergiert die* Fixpunkt-Iteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^**;*

(c) *Es gilt die* a priori-Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|x_1 - x_0\|;$$

und die a posteriori-Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Beweis: **(b):** Sei $x_0 \in D$ beliebig. Dann gilt $x_k = \Phi(x_{k-1}) \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Somit ist $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in D, wobei gilt

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq L\|x_k - x_{k-1}\|.$$

und somit

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq L^{k+1-n}\|x_n - x_{n-1}\| \qquad \text{für } k \geq n.$$

Für $m \geq n \geq k$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n)\| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} L^{k+1-n}\right) \|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} L^j\right) \|x_n - x_{n-1}\| = \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\|.
\end{aligned}$$

Weiterhin

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

womit

$$\lim_{n\to\infty}\|x_m - x_n\| = \lim_{n\to\infty}\frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| = 0.$$

$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist Cauchy-Folge mit Grenzwert $x^* \in D$, d.h. $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Wegen der Stetigkeit von Φ und mit $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ folgt daraus $x^* = \Phi(x^*)$.

(a): Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $x^{**} \in D$, mit $x^* \neq x^{**}$.

Dann folgt der Widerspruch

$$\|x^{**} - x^*\| = \|\Phi(x^{**}) - \Phi(x^*)\| \leq L\|x^{**} - x^*\| < \|x^{**} - x^*\|.$$

(c): Folgt sofort mit

$$\|x^* - x_n\| = \lim_{m\to\infty}\|x_m - x_n\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

■

Beispiel. Berechne Fixpunkt von $\Phi(x) = 0.1 \cdot \exp(x)$ auf $D = [-1, 1]$.

Überprüfe zunächst die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes:

- D ist nichtleer und abgeschlossen;
- es gilt $0 < \Phi(x) \leq 0.1 \cdot e < 1$ und somit $\Phi(D) \subset D$;
- es gilt $|\Phi'(x)| = \Phi(x) \leq e/10 < 1$ für alle $x \in D$;
- somit ist Φ kontrahierend auf D mit $L = e/10 < 1$.

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Berechne nun den Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ mit der Iteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Setze $x_0 = 1$. Dann bekommt man $x_1 = 0.2718281828\ldots$, und es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Für $\varepsilon = 10^{-6}$ bekommt man damit

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \qquad \text{für } n \geq 11.$$

8 Potenzreihen und elementare Funktionen

8.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition: *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*, mit* $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *für* $D \subset \mathbb{C}^m$*, eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

- punktweise *gegen* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$*, falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \qquad \text{für alle } z \in D.$$

- gleichmäßig *gegen* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$*, falls gilt*

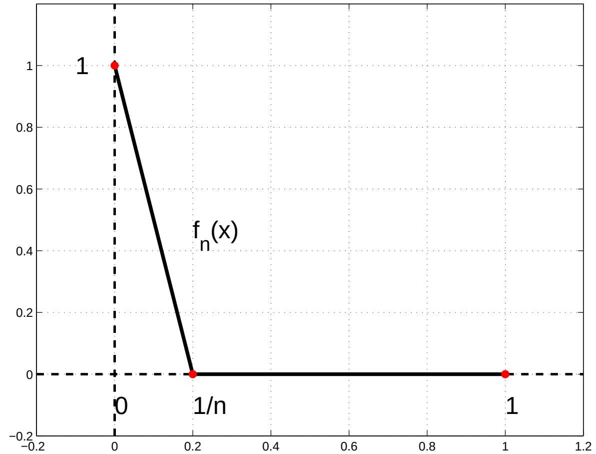
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

□

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. □

Gegenbeispiel. Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{für } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$



Der Graph von $f_n(x)$.

Die Folge konvergiert *punktweise* gegen die *unstetige* Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ *nicht* gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Satz: *Falls eine Folge* $(f_n)_n$ *stetiger Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{C}$*,* $D \subset \mathbb{C}^m$*, gleichmäßig auf* D *gegen* $f : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert, so ist* f *stetig auf* D*.*

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, so dass

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3.$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \varepsilon/3 \qquad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $z \in D$ mit $\|z - z_0\| < \delta$. ■

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Funktionenfolge mit* $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, *und gelte*

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*. Dann ist die Reihe*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D*.*

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left| \sum_{n=0}^{m} f_n(z) - f(z) \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy-Konvergenzkriterium für unendliche Reihen. ■

Folgerung: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, so dass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \qquad \text{für } z \in D,$$

gleichmässig konvergiert auf D. Dann ist f stetig auf D. □

Vertauschbarkeit Differentiation und Summation.

Satz: *Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$, so dass*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{und} \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \qquad \text{für } x \in (a, b),$$

gleichmäßig konvergent auf (a, b) sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a, b), und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \qquad \text{für alle } x \in (a, b).$$

□