Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Vorlesungsvertretung Analysis II, H. P. Kiani, SoSe 2014

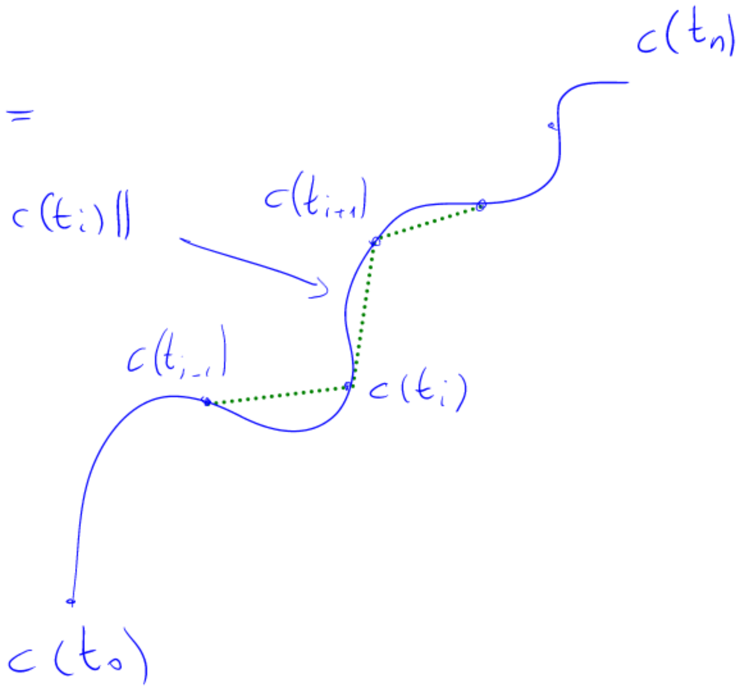
Ergänzungen/Erläuterungen zu den Folien von Prof. Iske

Kurvenintegrale

Zur Erinnerung: Kurve = stetige Funktion $\quad \mathbf{c} : [a,b] \to \mathbb{R}^n,$

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot c_1(t) \\ \dot c_2(t) \\ \vdots \\ \dot c_n(t) \end{pmatrix}$$

Länge =
$\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|$



Kurvenlänge einer stückweise C^1-Kurve:

$$\boxed{L(\mathbf{c}) \;=\; \int_a^b 1 \cdot \|\dot{\mathbf{c}}(t)\|\, dt \;=:\; \int_{\mathbf{c}} 1 \cdot\, ds.}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|}{t_{i+1} - t_i} (t_{i+1} - t_i)$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^b \|\dot c(t)\|\, dt$$

Im $\mathbb{R}^2$: $\qquad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Polarkoordinaten: (Folie 159) r, ϕ statt x, y

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cdot\cos(\phi(t)) \\ r(t)\cdot\sin(\phi(t)) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \begin{pmatrix} \dot r(t)\cos(\varphi(t)) + r(t)(-\sin(\varphi(t)))\,\dot\varphi(t) \\ \dot r(t)\sin(\varphi(t)) + r(t)(\cos(\varphi(t)))\,\dot\varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot r c - r s \dot\varphi$$

$$\dot r s + r c \dot\varphi$$

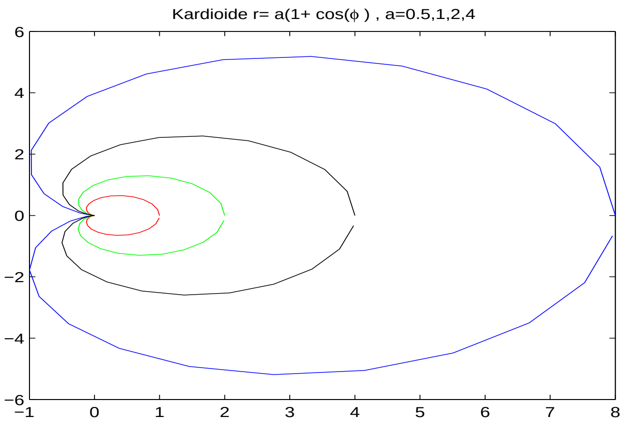
$$\underline{\dot r^2 c^2} - 2\dot r c r s \dot\varphi + r^2 s^2 (\dot\varphi)^2 + \underline{\dot r^2 s^2} + 2\dot r s r c \dot\varphi + r^2 c^2 \dot\varphi^2$$

$$\|\dot{\mathbf{c}}(t)\|^2 = \dot r^2 \underbrace{(c^2 + s^2)} + r^2\dot\varphi^2 (\underbrace{s^2 + c^2}_{1}) = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}\, dt$$

Kardioide: (Folie 160)



$$r \;=\; a \cdot (1 + \cos(\phi)), \qquad a > 0,\; 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$t = \phi, \quad \dot{\varphi} = \frac{d}{d\phi}\phi = 1, \quad \dot{r} = \frac{d}{d\phi} r(\phi) = -a\sin(\varphi)$$

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\, d\varphi$$

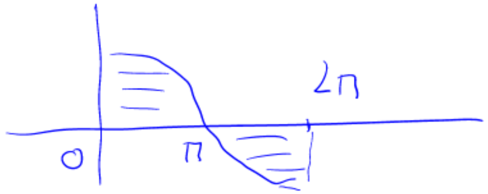
$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\underline{\sin^2}\varphi + 1 + 2\cos\varphi + \underline{\cos^2}\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2(\varphi/2)}\, d\varphi$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$$

$$= a \int_0^{2\pi} 2 \left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| d\varphi$$



$$= 4a \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

oder

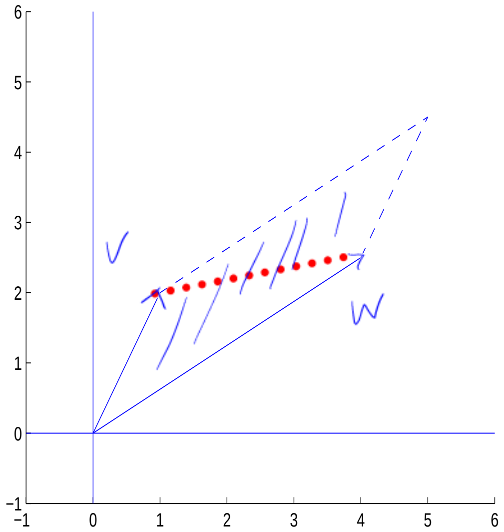
$$= 2a \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi - 2a \int_{\pi}^{2\pi} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 2a\left(\left[\frac{\sin(\varphi/2)}{1/2}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin(\varphi/2)}{1/2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= 4a\left[\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} - \underbrace{\sin(0)}_{0} - \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right] = 8a$$

Von eine Kurve umschlossene Fläche: (Folie 160)

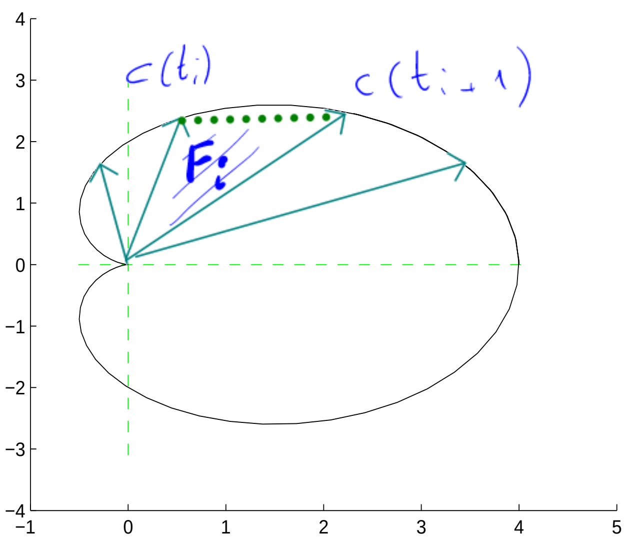
$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \; t \in [a,b]$$

$$\boxed{F(\mathbf{c}) = \int_a^b \left(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) \right) dt.}$$



Zur Erinnerung:

$$F = \left| \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \right| = v_1 w_2 - v_2 w_1$$



$$F_i = \frac{1}{2}\,\mathsf{det}\,\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}(t_i) & \boldsymbol{c}(t_{i+1})\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\mathsf{det}\begin{pmatrix} x(t_i) & x(t_{i+1}) \\ y(t_i) & y(t_{i+1})\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})\cdot y(t_i)\right)$$

$$=: \frac{1}{2}\left(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1}\cdot y_i\right)$$

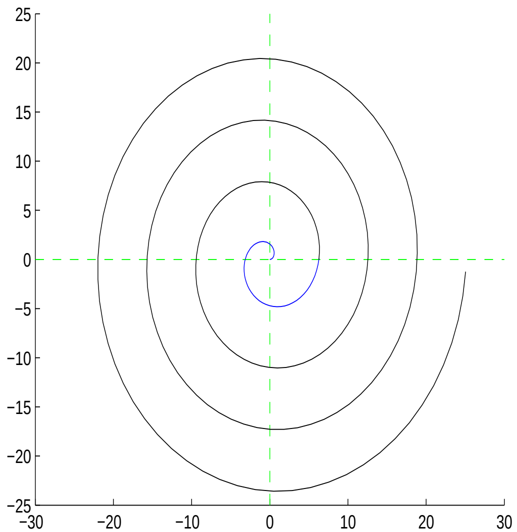
$$F = \sum_{k=0}^{n-1} F_i = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)$$

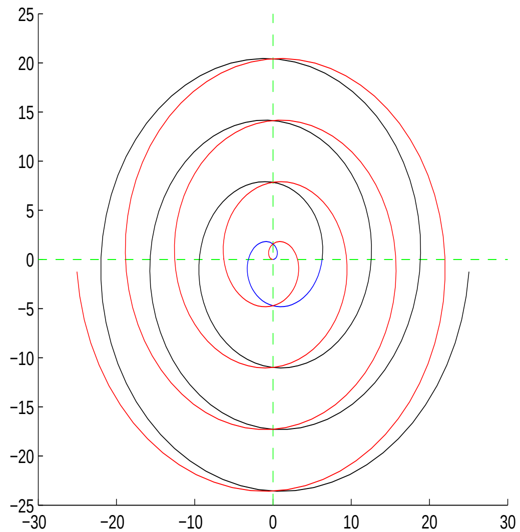
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_i \cdot y_{i+1} \overbrace{- x_i \cdot y_i + x_i \cdot y_i}^{0} - x_{i+1} \cdot y_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(x_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - y_i \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \right) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Beispiel: Archimedische Spirale: Folie 162 Prof. Iske





Hier: Ellipse

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{c}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) = a\cos(t)b\cos(t) - (-a\sin(t))b\sin(t)$$

$$= ab\cos^2(t) + ab\sin^2(t)$$

$$F(\boldsymbol{c}) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} 1 \, dt$$

$$= \frac{1}{2} ab \, t \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} ab \, (2\pi - 0) = a \cdot b \cdot \pi$$

Folie 163-165 Prof. Iske: Kurvenintegrale

$c : [a, b] \to D,\ D \subset \mathbb{R}^n$, stückweise C^1-Kurve

$f : D \to \mathbb{R}$ stetige skalare Abbildung. Dann ist das

Kurvenintegral (Linienintegral) von f über $\mathbf{c}$ definiert durch

$$\int_{\mathbf{c}} f\, ds \ := \int_{\mathbf{c}} f(x)\, ds \ := \int_a^b f(\mathbf{c}(t))\, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \int_a^b f(\mathbf{x}(t))\, \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt\,.$$

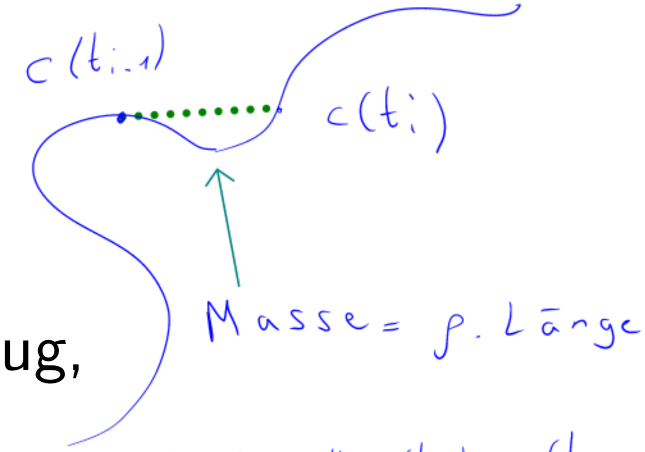
Beispiele:

Länge: $f(\mathbf{c}(t)) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbf{c}} f\, ds =$ Länge der Kurve,

Masse: $f(\mathbf{c}(t)) = \rho(\mathbf{c}(t)) =$ Dichte (Masse pro Längeneinheit)

$$\Longrightarrow \quad M =: \int_{\mathbf{c}} f\, ds = \int_a^b \rho(\mathbf{c}(t))\, \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt$$

$=$ Masse der Kurve (z.B. Drahtstück).



Herleitung: Approximiere Kurve durch Polygonzug,

$M_i \approx \rho(c(t_i)\, \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$

Dichte auf $[\boldsymbol{c}(t_{i-1}), \boldsymbol{c}(t_i)] \approx \rho(c(t_i))$.

Masse des Stücks $[\boldsymbol{c}(t_{i-1}), \boldsymbol{c}(t_i)]$

$M_i \approx \rho(c(t_i))\, \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$.

Gesamtmasse:

$$M := \sum_{i=1}^m M_i = \sum_{i=1}^m \rho(\boldsymbol{c}(t_i))\, \|\underbrace{\boldsymbol{c}(t_i) - \boldsymbol{c}(t_{i-1})}_{t_i - t_{i-1}}\| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

$$\int_a^b \rho(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

Für den Schwerpunkt gilt

$$\boxed{\mathbf{X}_s = \frac{\displaystyle\int_a^b \rho(\boldsymbol{c}(t))\, \overbrace{\mathbf{c}(t)}^{\text{Ort}} \|\dot{\boldsymbol{c}}(t)\| dt}{\displaystyle\int_a^b \rho(\boldsymbol{c}(t))\, \|\dot{\boldsymbol{c}}(t)\| dt} = \frac{\displaystyle\int_c \rho(\boldsymbol{x})\, \mathbf{x} ds}{\displaystyle\int_c \rho(\boldsymbol{x})\, ds} =: X_s\,.}$$

wobei das Integral im Zähler komponentenweise ausgwertet wird.

Trägheitsmoment des Massebelgten Drahtes bei der Rotation um eine Achse A

$$\boxed{\theta_A = \int_c \rho(\boldsymbol{x}) r^2(\boldsymbol{x})\, ds = \int_a^b \rho(\boldsymbol{c}(t))(r(\boldsymbol{c}(t)))^2\, \|\dot{\boldsymbol{c}}(t)\|\, dt.}$$

wobei $r(\boldsymbol{c}(t))$ der Abstand zur Rotationsachse ist.

Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen (Folie 164, Prof. Iske) wird genauso bewiesen wie Parametrisierungsinvarianz der Kurvenlänge auf Folie 154 (Kettenregel/Substitution)

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 16\pi]$$

Schraubenlinie mit 8 Windungen

$$f(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2)z}{1+z^2}$$

$$f(c(t)) = \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t)\,t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\int_0^{16\pi} f(c(t)) \cdot \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$= \int_0^{16} \frac{t}{1+t^2} \cdot \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{2} \cdot 2t}{1+t^2}\, dt$$

$$n = 1 + t^2 \qquad \frac{dn}{dt} = 2t$$

$$dn = 2t \cdot dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dn}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \log|n(t)| + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \log(1+t^2) + C$$

Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Dr. H. P. Kiani

Vorlesung Analysis II, H. P. Kiani, SoSe 2014

Folien von Prof. Iske mit Ergänzungen
SoSe 2014

periodische Funktionen

Periodischer Funktionen

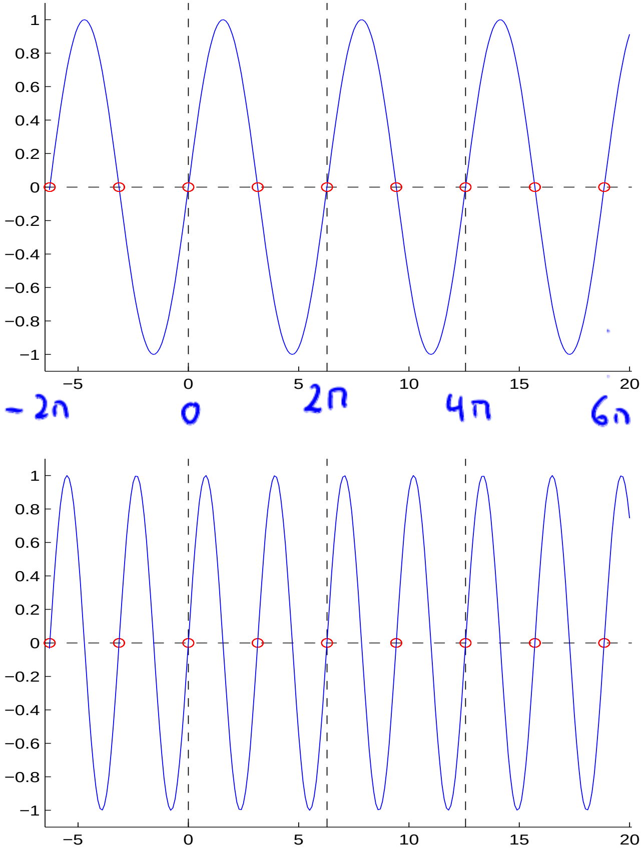


Abbildung 1: sin (x) und sin (2x)

f **periodisch** mit der Periode $T > 0$: $\qquad f(t+T) = f(t) \, \forall \, t \in \mathbb{R}$

Beobachtungen: Seien f und g $\quad T-$periodisch

- $\Longrightarrow \quad f$ ist auch $k \cdot T$ peridisch, $k \in \mathbb{N}$

$$f(t+T) = f(t) \Longrightarrow f(t+kT) = f(t)$$

- $f(kt)$ ist auch $T-$periodisch $\qquad f(k(t+T)) =$

  Beispiel: $\sin(kt)$, $\cos(kt)$, $k \in \mathbb{N}$ sind $2\pi-$periodisch

- $\alpha f + \beta g$ ist $T-$periodisch

  Beispiel: Die Funktionen

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

sind $2\pi-$periodisch

- Die Funktionen $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$ sind $T = \frac{2\pi}{\omega}$ −periodisch

$\frac{\omega}{2\pi}$ = Frequenz

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ heißt **Kreisfrequenz**

$$\sin(k\omega(t+T)) = \sin(k\omega t + k\omega T)) = \sin(k\omega t + k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T))$$

$$= \sin(k\omega t + k2\pi)) = \sin(k\omega t)$$

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg

Sommersemester 2014

12 Fourier-Analysis

12.1 Grundlegende Begriffe

Definition: *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(oder* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*) heißt* periodisch mit der Periode T *(oder* T-periodisch*), falls*

$$f(t + T) = f(t) \qquad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

□

Ziel: Entwicklung einer T periodischen Funktion f in eine Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

Zur Erinneung: etwas L.A.

Definiere auf (geeignetem) Funktionenraum V mit Unterraum

$$T_n := \left\{ g : g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) \; a_k, b_k \in \mathbb{R}, \right\}$$

aller $T-$periodischen **trigonometrischen Polynome vom (Höchst-)Grad n**

das Skalarprodukt $\quad < f, g > := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t)\, dt\,.$

und die Norm $\quad \| g \| := \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T (g(t))^2\, dt} = \sqrt{< g, g >}\,.$

Dann ist $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t),\; k = 1, \cdots, n \right\}$ ein Orthonormalsystem.

Für eine gegebene Funktion f aus V ist

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right) \qquad \text{mit}$$

$$\langle f, \cos(k\omega t) \rangle = \quad a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$\langle f, \sin(k\omega t \rangle = \quad b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

die beste Approximation aus T_n, dass heißt

$$\| f - f_n \| \le \| f - g \| \quad \forall g \in T_n\,.$$

konst. Term $\quad \langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{2} \underbrace{\langle f, \cos(0 \cdot \omega t) \rangle}_{a_0}$

Bemerkungen.

- Ist T eine Periode von f, so auch kT, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode von f.
- Sind T_1 und T_2 Perioden von f, so sind auch

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 \qquad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

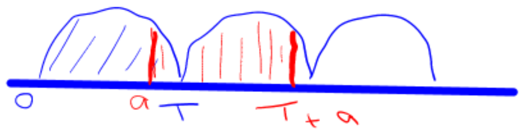
  Perioden von f.
- Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$ von f, so ist die Menge der Perioden von f gegeben durch kT, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion f besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind f und g T-periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, T-periodisch.
- Ist f T–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

  für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Beweis zum letzten Punkt aus Folie 167

$a = k \cdot T + \alpha$ mit einem $k \in Z$ und einem $0 < \alpha < T$



$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_{\alpha+kT}^{\alpha+kT+T} f(t)dt$$

Sustitution $\tau = t - k \cdot T$

$t = \tau + kT$ $\quad \frac{d\tau}{dt} = 1$

$$= \int_\alpha^{\alpha+T} f(\tau + \cancel{kT})d\tau = \int_\alpha^{\alpha+T} f(\tau)d\tau$$

Periodizität

$$= \int_\alpha^{T} f(\tau)d\tau + \int_T^{\alpha+T} f(\tau)d\tau$$

Sustitution $v = \tau - T$

$\frac{dv}{d\tau} = 1$ $\quad \tau = v + T$

$$= \int_\alpha^{T} f(\tau)d\tau + \int_0^{\alpha} f(v + \cancel{T})dv$$

$$= \int_\alpha^{T} f(\tau)d\tau + \int_0^{\alpha} f(v)dv$$

Periodizität

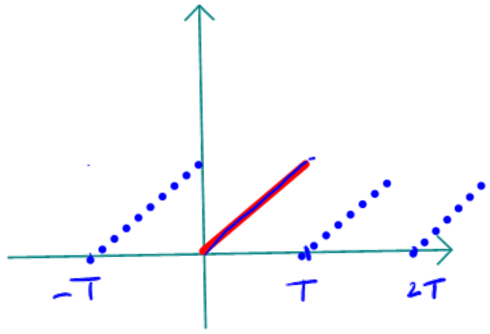
$$= \int_0^{T} f(\tau)d\tau$$

Periodische Fortsetzungen.

Definition: *Eine Funktion* $g(t)$, $t \in [0, T]$ *bzw.* $t \in [0, T/2]$ *läßt sich zu einer* T*-periodischen Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wie folgt fortsetzen.*

- Direkte Fortsetzung.

$$f(t) := g(t - kT) \qquad \textit{für } kT \leq t < (k+1)T$$

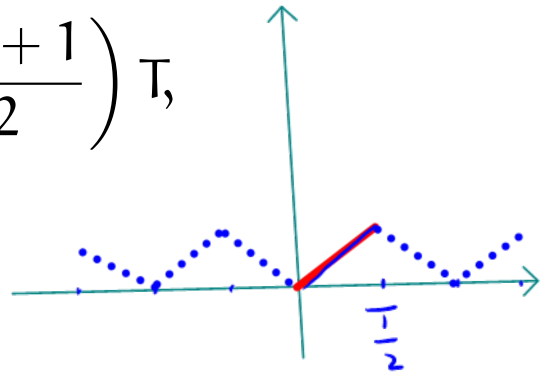


- Gerade Fortsetzung. *Sei* $g(t)$ *auf* $[0, T/2]$ *gegeben. Dann setze*

$$f(t) := g(t - kT) \qquad \textit{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right) T \leq t < \left(\frac{2k+1}{2}\right) T,$$

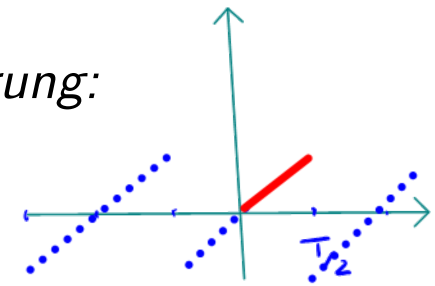
wobei g *zunächst an der* y*-Achse gespiegelt wird:*

$$g(t) := g(-t), \qquad \textit{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$



- Ungerade Fortsetzung. *Wie oben, aber Spiegelung um Ursprung:*

$$g(t) := -g(-t), \qquad \textit{für } -\frac{T}{2} \leq t < 0.$$



Fourier-Reihen und trigonometrische Polynome.

Definition:

- *Eine Reihe der Form*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}\textit{)}$$

heisst Fourier-Reihe *(oder* trigonometrische Reihe*). Dabei sei*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- *Die zugehörigen Partialsummen*

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \qquad \textit{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \textit{ (oder } \mathbb{C}\textit{)}$$

der Fourier-Reihe $f(t)$ *heißen* trigonometrische Polynome *vom Grad* n.

Konvergenz? Für welche f? In welcher Norm? □

Vieles einfacher in $\mathbb{C}$

z. B.: Nachweis ONS

Phasenverschiebung

Lösung von Diff.gln

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Es gilt die **Eulersche Formel**

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

womit

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right] \qquad \text{einsetzen} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\
&= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\gamma_0} + \sum_{k=1}^{n} \left[\underbrace{\frac{a_k - ib_k}{2}}_{\gamma_k} e^{ik\omega t} + \underbrace{\frac{a_k + ib_k}{2}}_{\gamma_{-k}} e^{-ik\omega t}\right]
\end{aligned}$$

Zusammenfassen nach e-Potenzen

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \qquad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt

$$a_0 = 2\gamma_0, \qquad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \qquad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$$

- Für die Darstellung der Fourier-Reihe bekommt man somit

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\omega t} \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Wichtige Frage: Konvergiert die Fourier-Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?