10.4 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration rationaler Funktionen

Also $\frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{wobei} \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Methode: Partialbruch-Zerlegung von rationaler Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)^1} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right]$$

$$+ \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1}x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j}x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]$$

Bsp: $\frac{x^4+x^3+2x^2}{x^3+x} = R(x)$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.

also • erst kürzen

$R(x) = \frac{\cancel{x}(x^3+x^2+2x)}{\cancel{x}(x^2+1)}$

- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg(p) \geq \deg(q).$$

In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt

• falls grad(Zähler) ≥ grad Nenner

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$

mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 2x : (x^2+1) &= x + 1 \\ -\;(x^3 \qquad + x) & \\ x^2 + x & \\ x^2 + 1 & \\ x - 1 & \quad \text{Rest} \end{aligned}$$

- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j;
  - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

Zähler $= x^3+x^2+2x = (x^2+1)(x+1) + x - 1$

$$R(x) = \frac{(x^2+1)(x+1) + x - 1}{x^2+1}$$

$$= \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+1} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$= \underbrace{(x+1)}_{p_1(x)} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$\int R(x)\,dx = \underbrace{\int p_1(x)\,dx}_{\text{einfach!}} + \underbrace{\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx}_{?}$$

Aufgabe: rationale Fkt. $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\text{grad}(p) < \text{grad}(q)$ integrieren

$$\int \frac{1}{x^l}\,dx = \begin{cases} \frac{x^{-l+1}}{-l+1} + C = \frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{x^{l-1}} + C & l \neq 1 \\ \log|x| + C & l = 1 \end{cases}$$

Folie 105

$u = x - \alpha$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^l}\,dx = \int \frac{1}{u^l}\,du$$

$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

Folie 122

Bsp. $\int \frac{2x+1}{x^2}\,dx = \int \frac{2x}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx$

$$= \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \frac{a}{x}\,dx + \int \frac{b}{x^2}\,dx$$

analog $\int \frac{2x+1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{\overset{2}{a}(x+1)+b}{(x+1)^2}\,dx$

$$= \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \underline{\int \frac{2\,dx}{(x+1)} - \int \frac{dx}{(x+1)^2}}$$

$\int \frac{p(x)}{(x-\alpha)^k}\,dx$: k fache Nullstelle im Nenner $\longrightarrow$ Ansatz

$$\frac{p(x)}{(x-\alpha)^k} = \frac{a_1}{(x-\alpha)} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{a_k}{(x-\alpha)^k}$$

$\longrightarrow$ Folie 118

Verschiedene Nennernullstellen

Bsp: $I = \int \frac{2x+4}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2x+4}{(x-1)(x+1)}\,dx$

Ansatz: $\frac{2x+4}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

$= \frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$\Longrightarrow 2x+4 = a(x+1) + b(x-1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$x = 1 \qquad 2+4 = a(2) + 0 \qquad a = 3$

$x = -1 \qquad -2+4 = 0 + b(-2) \qquad b = -1$

$\int \frac{2x+4}{x^2-1}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{x+1}\,dx$

$= 3\log|x-1| - 1\cdot\log|x+1| + C$

Kombination der Ansätze:

$$\int \frac{a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{(x-1)^2 (x+1)} \, dx$$

Ansatz $$\frac{a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{(x-1)^2 \underline{(x+1)}} = \left[\frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2}\right] + \left[\frac{c}{(x+1)}\right]$$

$\longrightarrow$ F 118

komplexes Nullstellenpaar

$$\frac{2x^2+2x+1}{(x^2+4)(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2+4} + \frac{c}{x-1}$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{(ax+b)(x-1) + c(x^2+4)}{(x^2+4)(x-1)}$$

$x = 1$: $\quad 2+2+1 = (a+b)\cdot 0 + c\cdot 5$

$5 = 5c \qquad \boxed{c = 1}$

$x = 0 \qquad 1 = b(-1) + c\cdot 4 = -b + 4 \qquad \boxed{b = 3}$

koeff x^2 : $\quad 2 = a + c = a + 1 \implies \boxed{a = 1}$

$$\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+4)(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \underbrace{\int \frac{x+3}{x^2+4}\,dx}_{?}$$

$\log(|x-1|)$

$$\int \frac{\alpha.\ \text{Nennerableitung} + \text{Rest}}{\text{Nenner}}$$

$$\int \frac{x+3}{x^2+4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x + 3}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\underline{x^2+4}}\,dx + 3\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+\underline{\underline{\frac{x^2}{4}}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|u| + \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot 2\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+4) + \frac{3}{2}\arctan(t) + C$$

$$u = x^2+4$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2x\cdot dx$$

$$t = \frac{x}{2}$$

$$t^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$2\,dt = dx$$

Doppelte komplexe Nullstellen

$$\frac{p(x)}{q(x)\,(x^2+4)^2} = \frac{p(x)}{(x-2i)^2\,(x+2i)^2\cdot q(x)}$$

Ansatz enthält:

$$\frac{ax+b}{(x^2+4)^1} + \frac{cx+d}{(x^2+4)^2}$$

a^2+2ab

Für Nennerterm $\left(\underline{\underline{x^2+6x}}+25\right)^2 =$

$$(x+3)^2 - 3^2 + 25 = (x+3)^2 + 16$$

$$= \underline{(x-(-3))^2} + \underline{4}^2$$

Ansatz

$$\frac{ax+b}{\underbrace{(x^2+6x+25)^1}_{\text{s. oben}}} + \frac{cx+d}{\underbrace{(x^2+6x+25)^2}_{\text{neu}}}$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+6x+25)^1}\,dx + \int \frac{cx+d}{(\underbrace{x^2+6x+25}_{u})^2}\,dx$$

$$\int \frac{\frac{c}{2}(\overbrace{2x+6}^{u'})}{(\underbrace{x^2+6x+25}_{u})^2}\,dx + \int \frac{d-3c}{((x+3)^2+16)^2}\,dx$$

$$\frac{c}{2}\int \frac{du}{u^2} + (d-3c)\int \frac{1}{(16+(x+3)^2)^2}\,dx$$

$$\frac{c}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) + (d-3c)\cdot\frac{1}{16^2}\int \frac{1}{\left(1+\frac{(x+3)^2}{16}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{c}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) + \frac{d-3c}{16^2}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\cdot 4\,dt$$

$$\frac{x+3}{4} = t$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4}$$

$$4\,dt = dx$$

Ansatz der Partialbruch-Zerlegung.

$$R(x) = p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x - x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x - x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x - x_j)^{k_j}} \right]$$

$$+ \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^{1}} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x - a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]$$

obdA: $(x-(-3))^2 + 4^2$

Unbekannte Parameter, die bestimmt werden müssen:

$$\alpha_{j\ell}, \qquad j = 1, \ldots, n_1,\ \ell = 1, \ldots, k_j;$$
$$\gamma_{j\ell}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ \ell = 1, \ldots, k_j;$$
$$\delta_{j\ell}, \qquad j = n_1 + 1, \ldots, n_2,\ \ell = 1, \ldots, k_j.$$

Diese Parameter werden durch Koeffizientenvergleich berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel. Betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \qquad x \cdot x \cdot (x^2+1)$$

- Ansatz:

$$R(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x = x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1)$$

- Ausmultiplizieren:

$$0 \cdot x^3 + 0x^2 + x^0 \cdot 1 - x = \underbrace{(\alpha_1 + \gamma_1)}_{0} x^3 + \underbrace{(\alpha_2 + \delta_1)}_{0} x^2 + \overset{-1}{\alpha_1} x + \overset{1}{\alpha_2} \cdot x^0$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

- Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

Typ I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

Typ II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x-x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \dfrac{1}{1-\ell} \cdot \dfrac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ III:

$$\mathrm{I}_\ell := \int \frac{1}{(x^2+1)^\ell}\,dx \qquad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

- Für $\ell = 1$ gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{I}_1}} = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$

- Für $\ell > 1$ kann man I_ℓ wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$\mathrm{I}_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)\mathrm{I}_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots.$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2(-1)}\left[(3-4)I_1 - \frac{x}{x^2+1}\right]$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{u^{\ell-1}} + C$$
$$= \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C$$

- Partielle Integration:

$$I_{\ell-1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell \quad (*)$$
$$\stackrel{*}{=} \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)} \cdot I_{\ell-1} + I_\ell$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2, 3, \ldots. \quad \blacksquare$$

(*)

$$I_{l-1} = \int \frac{1}{(x^2+1)^{l-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{l-1}(x^2+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2}{(x^2+1)^l}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^l}\,dx$$

$$= \int \underbrace{\frac{x}{2}}_{g} \cdot \underbrace{\frac{2x}{(x^2+1)^l}}_{h'}\,dx + I_l$$

$$h(x) = \int \frac{2x}{(x^2+1)^l}\,dx$$

$$u = x^2+1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad 2x\,dx = du$$

$$h(u) = \int \frac{du}{u^l}$$

$$= \frac{1}{1-l}\,\frac{1}{u^{l-1}}$$

$$l \neq 1$$

$$I_{l-1} = \left[\underbrace{\frac{x}{2}}_{g} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{l-1}}}_{h}\right]$$

$$- \int \underbrace{\frac{1}{2}}_{g'} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-l} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{l-1}}}_{h}\,dx + I_l$$

auflösen nach I_l

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx+d}{\big(\underbrace{(x-a)^2+b^2}_{u}\big)^\ell}\,dx \overset{(*)}{=} \frac{c}{2}\int \frac{\overbrace{2(x-a)}^{u'}}{\big((x-a)^2+b^2\big)^\ell}\,dx + (d+ca)\int \frac{dx}{\big((x-a)^2+b^2\big)^\ell}$$

- Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x-a)}{\big((x-a)^2+b^2\big)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} \qquad \text{mit } u=(x-a)^2+b^2.$$

$$= \begin{cases} \log\big(|(x-a)^2+b^2|\big)+C & \text{für } \ell=1 \\ \dfrac{1}{1-\ell}\cdot\dfrac{1}{\big((x-a)^2+b^2\big)^{\ell-1}}+C & \text{für } \ell=2,3,\ldots. \end{cases}$$

- Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{\big((x-a)^2+b^2\big)^\ell} = \frac{1}{b^{2\ell-1}}\int\frac{dt}{(t^2+1)^\ell} \qquad \text{mit} \quad t=\frac{x-a}{b}.$$

Beispiel.

$$\tilde{R}(x) = \frac{5+3x+x^2}{x^2(x^2-2x+5)}$$

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}$$

$$= \frac{\quad}{x^2((x-1)^2+4)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a}{x}}} + \underline{\underline{\frac{b}{x^2}}} + \frac{cx+d}{x^2-2x+5}$$

Somit bekommt man

$$\int R(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\log(|x|) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan(x) + C$$

■

$$5+3x+x^2 = ax(x^2-2x+5) + b(x^2-2x+5) + x^2(cx+d)$$

$$a x (x^2 - 2x + 5) + b(x^2 - 2x + 5) + (cx + d) x^2 = 5 + 3x + x^2$$

$$ax^3 - 2ax^2 + 5ax + \dots$$

Koeff'nvergleich $\Longrightarrow$ $a = b = 1, \quad c = -1, \quad d = 2$

$$\longrightarrow \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-x+2}{\underline{x^2 - 2x + 5}} \right) dx = \log|x| - \frac{1}{x} + \int \frac{-x+2}{\dots} dx$$

$$\int \frac{-x + 2}{\underline{(x-1)}^2 + 4} dx = \int \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) 2(x-1) + 1}{(x-1)^2 + 4} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 4} dx + \int \frac{1}{\underline{\underline{4}} + (x-1)^2} dx$$

$$u = (x-1)^2 + 4$$

$$2(x-1)\, dx = du$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{(x-1)^2}{4}}_{t^2}} dx$$

$$t = \frac{x-1}{2}$$

$$dt/dx = 1/2$$

$$= -\frac{1}{2}\log|u| + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t^2} \cdot 2dt$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left((x-1)^2+4\right) + \frac{1}{2} \cdot \arctan t + C$$

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $\boxed{t = e^x}$ in

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$

Bsp:

$$R(e^x) = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^{3x} + e^x} = \frac{t^2 + t + 1}{t^3 + t^1}$$

- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{\cos(x) + \sin(x)}{3 + \sin(x)}$$

und somit durch Substitution in

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \underbrace{\frac{2}{1+t^2}\,dt}_{dx}$$

□

10.5 Uneigentliche Integrale

Ziel: Berechne `uneigentliche Integrale`, d.h.

- Integrale über unbeschränkten Bereichen

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

- Integrale über unbeschränkten Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{wobei } f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ stetig} \quad \text{oder} \quad f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R} \text{ stetig}$$

Bsp $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$: $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,dx = \lim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_\varepsilon^1 = 2$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subset \mathbb{R}$ *heißt* `lokal integrierbar`, *falls* f *über jedem kompakten Teilintervall* $[a, b] \subset D$ *integrierbar ist.* □

Definition: *Ist eine Funktion* $f(x)$ *lokal integrierbar über* $[a, \infty)$ *bzw.* $(-\infty, b]$ *bzw.* $(-\infty, \infty)$, *so definiert man*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{y\to-\infty} \int_y^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}.$$

□

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ bzw. (a, b), so definiert man

Singularität / Def.lücke / Pol in

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{y \to a+ \\ \varepsilon \to 0^+}} \int_y^b f(x)\,dx$$

$x = a$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \to b-} \int_a^y f(x)\,dx$$

$x = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{für } \underline{\underline{c \in (a, b)}}.$$

$x = a \wedge b$

Bsp $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}\,dx = \int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}\,dx + \int_{1/4}^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}\,dx$$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon+}^{1/4} \ldots + \lim_{y \to 1-} \int_{1/4}^{y} \ldots$

Ein Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

$\alpha > 1$

$\alpha - 1 > 0$

$x^{\alpha-1} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

$\frac{1}{x^{\alpha-1}} \longrightarrow 0$

Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha > 1 \\ \log(|x|) + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

$\alpha < 1 \quad 1-\alpha > 0$

$\frac{1}{x^{\alpha-1}} = x^{1-\alpha} \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$. ■

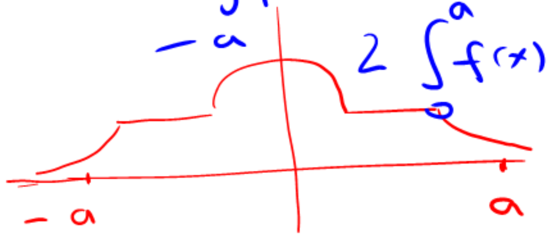
$<$

Ein weiteres Beispiel. Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx.$$

$f(x) = f(-x)$

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$



Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx = -\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx,$$

und weiterhin

$$\int_{0}^{y} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{y^2} e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\left(-e^{-u}\right)\Big]_0^{y^2} \qquad \text{mit } u = x^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-y^2}\right) \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } y \to \infty.$$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$du = 2x\,dx$

$dx = \frac{du}{2x}$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx = 1$$

$x \cdot e^{-x^2}\,dx$

$= x\,e^{-u}\,\frac{du}{2x} = \frac{e^{-u}}{2}\,du$

■

Konvergenzkriterien.

Satz: *Sei* $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *lokal integrierbar. Dann gilt:*

(a) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *existiert genau dann, wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, C > a \;:\; \forall\, z_1, z_2 > C \;:\; \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

(b) Ist das uneigentliche Integral `absolut konvergent`, *d.h.*

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

konvergiert, so konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

$\square$

Majorantenkriterium.

Satz: *Sei* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar. Dann gilt:*

(c)

$$\forall x \; : \; |f(x)| \leq g(x) \quad \textit{und} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{konvergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{absolut konvergent}$$

(d) Weiterhin gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x \; : \; 0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \textit{und} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{divergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{divergent.}$$

$\square$

Beispiel: Das Dirichlet-Integral

Betrachte das Dirichlet-Integral

$u = \frac{1}{x} \qquad v' = \sin x$

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Das Dirichlet-Integral ist konvergent, denn es gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \underbrace{-\frac{\cos(x)}{x}\Big|_{y_1}^{y_2}} - \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx}_{\text{MWS:}}$$

und somit

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{y_1} \to 0 \quad \text{für } y_1 \to \infty.$$

$$\leq \Big| \underbrace{-\frac{\cos(y_2)}{y_2} + \frac{\cos(y_1)}{y_1}} - \underbrace{\cos(\xi)\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{x^2}\,dx} \Big|$$

□

Bemerkungen:

- Das Dirichlet-Integral ist *nicht* absolut konvergent;
- Das Dirichlet-Integral besitzt den Wert $I = \pi/2$. □

Beispiel: Das Exponentialintegral

$\lim_{t \to -\infty} t e^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} \overset{l.H}{=}$

- Betrachte das Exponentialintegral

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad \text{für } x < 0.$$

Wegen $\lim_{t\to-\infty} te^t \overset{*}{=} 0$ gibt es ein $C > 0$ mit $|te^t| \leq C$ für alle $t \in (-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left|\frac{e^t}{t}\right| = \frac{|te^t|}{t^2} \leq \frac{C}{t^2}.$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\, dt$$

folgt die *absolute Konvergenz* des Exponentialintegrals $\mathrm{Ei}(x)$ für alle $x < 0$ aus dem Majorantenkriterium. ■

Beispiel: Die Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad \text{für } x > 0.$$

Beachte: Für $0 < x < 1$ ist der Integrand von $\Gamma(x)$ singulär. Mit

$$\left| e^{-t} t^{x-1} \right| \leq t^{x-1} \qquad \text{für } 0 < t \leq 1$$

folgt jedoch in diesem Fall

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x}\left(1 - \varepsilon^x\right) \longrightarrow \frac{1}{x} \qquad \text{für } \varepsilon \to 0+\,.$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral:

$$\left| e^{-t} t^{x-1} \right| = \left| \frac{e^{-t} t^{x+1}}{t^2} \right| \leq \frac{C}{t^2} \qquad \text{für } 1 \leq t \leq \infty.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\Gamma(x)$ für $x > 0$.

Weitere Bemerkungen zur Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(1) = 1.$$

□

Folgerung: Es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

■