Fachbereich Mathematik **WiSe 2014/2015**
Prof. Dr. A. Iske

Klausur zur Mathematik II

(Modul: Analysis II)

19. Februar 2015

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	BU	ET	IIW	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gegeben ist die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (x-8)^k}{3^k}$.

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Lösung:

a) Mit $\boldsymbol{a}_k = \dfrac{k}{3^k}$ gilt für den Konvergenzradius r:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k \cdot 3^{k+1}}{(k+1) \cdot 3^k}$$
$$= \lim_{k\to\infty} 3 \cdot \frac{k}{k+1} = 3 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{k}} = 3\,.$$

b) Im Randpunkt $x_1 = 5 = 8-3$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (5-8)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (-3)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot k\,.$$

und im Randpunkt $x_2 = 11 = 8+3$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (11-8)^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 3^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,.$$

In beiden Fällen konvergieren die Summanden nicht gegen Null. Die Reihe divergiert in beiden Randpunkten.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Gegeben sind folgende Daten der Funktion $f(x) := \dfrac{x^4}{12} - \sin\left(\frac{\pi}{6}\, x\right)$.

x_k	-1	0	1
$f(x_k)$	$\dfrac{7}{12}$	0	$-\dfrac{5}{12}$

a) Berechnen Sie zu den gegebenen Daten das zugehörige Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades.

b) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f.

c) Zeigen Sie, dass folgende Abschätzung für den Interpolationsfehler im Punkt $x = \dfrac{1}{10}$ gilt:

$$\left| p_2\left(\frac{1}{10}\right) - f\left(\frac{1}{10}\right) \right| \leq \frac{5}{100}.$$

Lösung:

a)

$$\begin{array}{c|cccc}
x_k & y_k & & \\
\hline
-1 & \frac{7}{12} & & \\
 & & -\frac{7}{12} & \\
0 & 0 & & \dfrac{-\frac{5}{12} - \frac{-7}{12}}{1-(-1)} = \dfrac{\frac{2}{12}}{2} = \frac{1}{12} \\
 & & -\frac{5}{12} & \\
1 & -\frac{5}{12} & &
\end{array}$$

$$p_2(x) = \frac{7}{12} - \frac{7}{12}(x+1) + \frac{1}{12}(x+1)(x-0) \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} - \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}\, x\right)$

$f''(x) = x^2 + \frac{\pi^2}{6^2} \sin\left(\frac{\pi}{6}\, x\right)$

$f'''(x) = 2x + \frac{\pi^3}{6^3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\, x\right)$ **[2 Punkte]**

c) Mit einem $\xi \in [-1, 1]$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| p_2\left(\frac{1}{10}\right) - f(\frac{1}{10}) \right| &= \left| \frac{f'''(\xi) \cdot (\frac{1}{10} - x_0)(\frac{1}{10} - x_1)(\frac{1}{10} - x_2)}{3!} \right| \\
&= \frac{1}{6} \cdot \left| 2\xi + \frac{\pi^3}{6^3} \cos\left(\frac{\pi}{6}\,\xi\right) \right| \cdot (\frac{1}{10} - \frac{-10}{10}) \cdot \left| \frac{1}{10} - 0 \right| \cdot \left| \frac{1}{10} - \frac{10}{10} \right| \\
&\leq \frac{1}{6} \cdot \left(2|\xi| + \frac{\pi^3}{6^3} \right) \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \\
&\leq \frac{1}{6} \cdot \left(2 + \frac{4^3}{6^3} \right) \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{10} \\
&< \frac{1}{6} \cdot (2 + 1) \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{100}. \qquad \textbf{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 : (8 Punkte)

a) Gegeben ist das Integral
$$I = \int \frac{(4e^{2t} + 6e^t + 8) \cdot e^t}{e^{3t} + 4e^{2t}} \, dt \; .$$
Überführen Sie das Integral mittels der Substitution $x = e^t$ in ein Integral über eine rationale Funktion.

b) Berechnen Sie
$$\int \frac{4x^2 + 6x + 8}{x^3 + 4x^2} \, dx \; .$$

Lösung:

a) Substitution: $x = e^t$, $\frac{dx}{dt} = e^t$ also $dx = e^t \, dt$ liefert:
$$I = \int \frac{(4e^{2t} + 6e^t + 8) \cdot e^t}{e^{3t} + 4e^{2t}} \, dt = \int \frac{4x^2 + 6x + 8}{x^3 + 4x^2} \, dx \, .$$ **[2 Punkte]**

b) Zu berechnen ist
$$\int R(x) \, dx = \int \frac{4x^2 + 6x + 8}{x^3 + 4x^2} \, dx \; .$$
Der Nenner hat die Nullstellen $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = -4$. Wir machen den Ansatz:
$$R(x) := \frac{4x^2 + 6x + 8}{x^2(x+4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+4} \, .$$
[1 Punkt]

Also $R(x) = \dfrac{4x^2 + 6x + 8}{x^3 + 4x^2} = \dfrac{ax(x+4) + b(x+4) + cx^2}{x^2(x+4)}$

Vergleich der Zähler liefert die Bedingung:
$$4x^2 + 6x + 8 = (a+c) \cdot x^2 + (4a+b) \cdot x + 4b \, .$$

Koeffizientenvergleich:

x^0 : $\quad 8 = 4b \iff b = 2$

x^1 : $\quad 6 = 4a + b = 4a + 2 \iff a = 1$ **[3 Punkte]**

x^2 : $\quad 4 = a + c = 1 + c \iff c = 3$.

Damit folgt
$$\int \frac{4x^2 + 6x + 8}{x^2(x+4)} = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{3}{x+4} dx$$
$$= \log(|x|) - \frac{2}{x} + 3 \log(|x+4|) + C \, .$$ **[2 Punkte]**