Fachbereich Mathematik **SoSe 2014**
Prof. Dr. A. Iske

Klausur zur Mathematik II

(Modul: Analysis II)

25. August 2014

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	

Studiengang:											
AIW	BU	ET	IIW	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gegeben ist die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot (x-10)^k}{4^k \cdot k}$.

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot (x-10)^k}{4^k \cdot k}.$$

Für den Konvergenzradius r gilt:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{3 \cdot (k+1) \cdot 4^{k+1}}{4^k \cdot k \cdot 3} = \lim_{k\to\infty} 4 \cdot \frac{k+1}{k} = 4.$$

Im Randpunkt $x_1 = 6 = 10 - 4$ erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot (-4)^k}{4^k \cdot k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(-1)^k}{k} = 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Wegen der Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe, konvergiert die Potenzreihe im Punkt $x_1 = 6$.

Im Randpunkt $x_2 = 14 = 10 + 4$ erhält man dagegen mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k}{4^k \cdot k} = 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

bis auf den Faktor 3 die divergente harmonische Reihe.

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Gegeben sind folgende Daten der Funktion $f(x) := \sin^2(\pi x) - 6x^2$.

x_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$f(x_k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

a) Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades zur Funktion f.

b) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f, und zeigen Sie, dass folgende Abschätzung für den Interpolationsfehler im Punkt $x = \frac{5}{24}$ gilt:

$$\left| p_2\left(\frac{5}{24}\right) - f\left(\frac{5}{24}\right) \right| < \frac{5}{100}.$$

Hinweis: $2\sin(\pi x)\cos(\pi x) = \sin(2\pi x)$

Lösung:

a)

$$\begin{array}{c|cccc}
x_k & y_k & & & \\
\hline
\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & & & \\
 & & \frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{3-2}{24}}{\frac{3-2}{12}} = \frac{1}{2} & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & & & \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = \frac{-1}{\frac{1}{6}} = -6 \\
 & & \frac{\frac{1}{12}-\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{2-3}{24}}{\frac{4-3}{12}} = -\frac{1}{2} & & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & & &
\end{array}$$

$$p_2(x) := \frac{1}{12} + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}) - 6(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{4}) \quad [4 Punkte]$$

b) $f'(x) = 2\pi\cos(\pi x)\sin(\pi x) - 12x$
(mit Hinweis $f'(x) = \pi\sin(2\pi x) - 12x$)

$f''(x) = -2\pi^2\sin^2(\pi x) + 2\pi^2\cos^2(\pi x) - 12$
(mit Hinweis $f''(x) = 2\pi^2\cos(2\pi x) - 12$)

$f'''(x) = -4\pi^3\sin(\pi x)\cos(\pi x) - 4\pi^3\sin(\pi x)\cos(\pi x) = -8\pi^3\sin(\pi x)\cos(\pi x)$
(mit Hinweis $f'''(x) = -4\pi^3\sin(2\pi x)$). [2 Punkte]

Mit einem $\xi \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left|p_2\left(\frac{5}{24}\right) - f(\frac{5}{24})\right| &= \left|\frac{f'''(\xi)\cdot(\frac{5}{24}-x_0)(\frac{5}{24}-x_1)(\frac{5}{24}-x_2)}{3!}\right| \\
&\leq \left|\frac{8\pi^3\sin(\pi\xi)\cos(\pi\xi)}{6}\right| \cdot (\frac{5}{24}-\frac{1}{6}) \cdot \left|\frac{5}{24}-\frac{1}{4}\right| \cdot \left|\frac{5}{24}-\frac{1}{3}\right| \\
&< \frac{8\cdot 4^3}{6}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{3}{24} \;=\; \frac{8\cdot 4^3}{2\cdot 4^3\cdot 6^3} \\
&= \frac{4}{2^2\cdot 3^2\cdot 6} \;=\; \frac{1}{54} \;=\; \frac{2}{108} \;<\; \frac{2}{100} \qquad [2 Punkte]
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 : (8 Punkte)

Berechnen Sie $\int R(x)\,dx = \int \frac{3x^2+3x+9}{x^3+9x}\,dx$.

Lösung:

Wir machen den Ansatz:

$$R(x) := \frac{3x^2+3x+9}{x(x^2+9)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+9} = \frac{a(x^2+9)+(bx+c)x}{x(x^2+9)}$$

Vergleich der Zähler liefert die Bedingung:

$$3x^2+3x+9 = a(x^2+9)+(bx+c)x = ax^2+9a+bx^2+cx$$

Einsetzen von $x=0$ bzw. Vergleich der konstanten Terme: $9=9a \iff a=1$.

Potenz x^1 : $\quad 3x = cx \iff c=3$.

Potenz x^2 : $\quad 3x^2 = ax^2+bx^2 = x^2+bx^2 \iff b=2$. **4 Punkte**

Darmit folgt

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+3x+9}{x^3+9x}\,dx &= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+9}dx \\
&= \log(|x|) + \int \frac{2x}{x^2+9}dx + 3\int \frac{1}{x^2+9}dx \qquad u = x^2+9,\ \frac{du}{dx} = 2x \\
&= \log(|x|) + \int \frac{1}{u}du + \frac{3}{9}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}dx \\
&= \log(|x|) + \log(|u|) + \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2}dx \qquad t = \frac{x}{3},\ \frac{dx}{dt} = 3 \\
&= \log(|x|) + \log(x^2+9) + \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot 3\,dt \\
&= \log(|x|) + \log(x^2+9) + \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C.
\end{aligned}$$

4 Punkte