Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2013**
Prof. Dr. R.Lauterbach
Dr. K. Rothe

Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 5:

Man untersuche die Funktionenfolgen

a) $f_n : [-2, 2] \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = \dfrac{1}{1 + ne^{x^2}}\,,$

b) $g_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}\,, \qquad g_n(x) = 1 + x^n\,,$

c) $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad h_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx^2}$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 6:

a) Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3 - 1)(2 - x^3)^k\,, \qquad \text{(ii)} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k} + 1)}\,.$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich D und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in D.

b) Man zeige, dass für $x \in \left]-\dfrac{1}{2}, \infty\right[$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(2x + k^2)(2x + k^2 + 2k + 1)}$$

gleichmäßig gegen $h(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ konvergiert.

Aufgabe 7: (aus dem Vordiplom Analysis II, SoSe 11, WiSe 10+11)

a) Für folgende Potenzreihen bestimme man den Entwicklungspunkt und berechne den Konvergenzradius.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n(n+1)} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n , \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9n+2}{5n+1}\right)^n (x+3)^n .$$

b) Man bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

Aufgabe 8:

Gegeben sei die durch $f(x) = \dfrac{6}{5-4x}$ definierte Funktion.

a) Man zeichne die Funktion f .

b) Man beweise über vollständige Induktion, dass für $n \geq 0$ gilt

$$f^{(n)}(x) = \frac{6 \cdot 4^n \cdot n!}{(5-4x)^{n+1}} .$$

c) Man berechne die Taylorreihe von f allgemein zum Entwicklungspunkt $x_0 \neq 5/4$ und bestimme den Konvergenzradius.

d) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für $x_0 = 0$ und $x_0 = 2$?
Liegt Konvergenz in den Randpunkten vor?

Abgabetermin: 22.4. - 26.4. (zu Beginn der Übung)