Fachbereich Mathematik **WiSe 2012/2013**
Prof. Dr. H.J. Oberle

Klausur Mathematik II

(Modul: Analysis II)

20. 03. 2013

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:

BU	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	sonstige

Wertung :

zusammen mit Lineare Algebra II		Einzelwertung	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		

$\sum =$

Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-2}^{-1} 2 \cdot e^{\frac{1}{x+3}} \cdot \left(\frac{1}{x+3}\right)^3 dx\,.$$

mit Hilfe der Substitution $y = \dfrac{1}{x+3}$.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{1}{u(1-u^2)}\,du\,.$

c) Gegeben ist das Integral $\displaystyle\int \frac{-1}{\cos(x)\sin(x)}\,dx\,.$

Zeigen Sie, dass die Substitution $u = \cos(x)$ auf das Integral aus Teil b) führt.

Hinweis: Erweitern Sie mit $\sin(x)$.

Lösungshinweise:

a) Mit Hilfe der Substitution $y = \dfrac{1}{x+3}, \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(x+3)^2} = -y^2$ erhält man

$$\begin{aligned} 2\int_{-2}^{-1} \frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^3}\,dx &= 2\int_1^{\frac{1}{2}} -y^3\frac{e^y}{y^2}dy \qquad \textbf{[2 Punkte]}\\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^1 ye^y dy = 2\,[ye^y]_{\frac{1}{2}}^1 - 2\int e^y dy\\ &= 2\,[e^y(y-1)]_{\frac{1}{2}}^1 = e^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{[2 Punkte]}. \end{aligned}$$

b)

$$f(u) = \frac{1}{u(1-u^2)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{1-u} + \frac{c}{1+u} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$1 = a(1-u^2) + bu(1+u) + cu(1-u)!$$

$u = -1\ :\ 1 = c(-1)(2) \implies c = -1/2$

$u = +1\ :\ 1 = b(1)(2) \implies b = +1/2$

$u = 0\ :\ 1 = a \implies a = +1$

$$\int \frac{1}{u(1-u^2)}\,du = \ln|u| - \frac{1}{2}\ln|1-u| - \frac{1}{2}\ln|1+u| + C \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

c)

$$I := \int \frac{-1}{\cos(x)\sin(x)}\,dx \qquad \text{Substitution } u = \cos(x)$$

$$I = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)\sin^2(x)}\,dx \qquad u = \cos x,\ du = -\sin(x)dx$$

$$I = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)(1-\cos^2(x))}\,dx = \int \frac{du}{u(1-u^2)}\,du\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral der Funktion

$$f(x,y) := \sqrt{1+2x+2y^2}$$

längs der Kurve

$$c : [1,4] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad c : t \longmapsto \left(t,\ \sqrt{t}\right)^T .$$

b) Gegeben sei $\quad f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-3,-2[\\ \dfrac{t}{2} & t \in [-2,2[\\ 0 & t \in [2,3[\end{cases}$

(i) Skizzieren Sie die 6-periodische Fortsetzung der Funktion f für $t \in [-6,6]$.

(ii) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der 6–periodischen Fortsetzung von f.

(iii) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe aus b) im Punkt $t = 2$?

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

a)

$$c : [1,\ 4] \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad c : t \longmapsto \left(t,\ \sqrt{t}\right)^T .$$

$$\dot{c}(t) = \left(1,\ \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^T \Longrightarrow \|\dot{c}(t)\| = \sqrt{1+\tfrac{1}{4t}} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Kurvenintegral der Funktion

$$f(c(t)) = \sqrt{1+2t+2t} = \sqrt{1+4t} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^4 f(c(t)) \cdot \|\dot{c}(t)\|\, dt &= \int_1^4 \sqrt{1+4t} \cdot \sqrt{\frac{1+4t}{4t}}\, dt \qquad \textbf{[1 Punkt]} \\
&= \int_1^4 \frac{1+4t}{2\sqrt{t}} = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{4t}{2\sqrt{t}}\right) dt \\
&= \left[\sqrt{t} + 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \\
&= 2 - 1 + \frac{4}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{31}{3} \qquad \textbf{[1 Punkt]}
\end{aligned}$$

b) (i) Skizze: [**1 Punkt**]

(ii) $a_k = 0$ da Funktion ungerade! [**1 Punkt**]

$$T = 6, \qquad \omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\sin(\frac{k\pi}{3}t)dt$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^2 \frac{t}{2}\sin(\frac{k\pi}{3}t)dt \ = \frac{1}{3}\int_0^2 t\sin(\frac{k\pi}{3}t)dt \qquad [\textbf{1 Punkt}]$$

$$= \frac{1}{3}\left[t\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{3}t\right)}{\frac{k\pi}{3}}\right]_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{3}t\right)}{\frac{k\pi}{3}}dt$$

$$= \frac{-2}{k\pi}\cos\left(\tfrac{2k\pi}{3}\right) + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}t\right)}{\frac{k\pi}{3}}\right]_0^2$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos\left(\tfrac{2k\pi}{3}\right) + \frac{3}{k^2\pi^2}\sin\left(\tfrac{2k\pi}{3}\right) \qquad [\textbf{2 Punkte}]$$

$$F_f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{3}t)$$

(iii) $F_f(2)$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}\left(f(2_-) + f(2_+)\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$ [**1 Punkt**]