Aufgabe 1:

a) Gegeben sind folgende Daten der Funktion $f(x) := \cos^2(x) = (\cos(x))^2$.

x_k	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x_k)$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

(i) Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades zur Funktion f.

(ii) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f, und zeigen Sie, dass folgende Abschätzung für den Interpolationsfehler im Punkt $x = \frac{7\pi}{36}$ gilt:

$$\left| p_2\left(\frac{7\pi}{36}\right) - f\left(\frac{7\pi}{36}\right) \right| < \frac{5}{100}.$$

b) Bestimmen Sie die Potenzreihe der Funktion

$$g(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösungsskizze:

a) (i)

x_k	y_k		
0	1		
		$\frac{\frac{3}{4}-1}{\frac{\pi}{6}-0} = -\frac{6}{4\pi} = -\frac{3}{2\pi}$	
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{-\frac{6}{2\pi}+\frac{3}{2\pi}}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{3\cdot 4}{2\pi^2}$
		$\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}} = -\frac{12}{4\pi} = -\frac{6}{2\pi}$	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$		

$$p_2(x) := 1 - \frac{3}{2\pi}(x-0) - \frac{6}{\pi^2}x(x-\frac{\pi}{6}) \quad [3 Punkte]$$

(ii)
$$f'(x) = -2\cos(x)\sin(x) \qquad (= -\sin(2x)),$$
$$f''(x) = 2\sin^2(x) - 2\cos^2(x) \qquad (= -2\cos(2x)),$$
$$f'''(x) = 4\sin(x)\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x) = 8\sin(x)\cos(x) \quad (= 4\sin(2x)).$$

[2 Punkte]

$$\begin{aligned}
\left|p_2\left(\frac{7\pi}{36}\right) - f(\frac{7\pi}{36})\right| &= \left|\frac{f'''(\theta)\cdot(\frac{7\pi}{36}-x_0)(\frac{7\pi}{36}-x_1)(\frac{7\pi}{36}-x_2)}{3!}\right| \\
&\le \frac{8\sin(\theta)\cos(\theta)}{6}\cdot(\frac{7\pi}{36})(\frac{7\pi}{36}-\frac{6\pi}{36})(\frac{9\pi}{36}-\frac{7\pi}{36}) \\
&\le \frac{8}{6}\cdot(\frac{7\pi}{36})(\frac{\pi}{36})(\frac{2\pi}{36}) \le \frac{4\cdot 7\cdot 2}{3}\cdot\frac{\pi^3}{36^3} \\
&\le \frac{56}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{56}{30}\left(\frac{1}{100}\right) < 2\cdot 10^{-2} \qquad [3 Punkte]
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn man $\pi/36$ mit $4/36 = 1/9$ abschätzt, erhält man als obere Schranke für den Fehler immer noch $3/100$. Wenn man dagegen die Additionstheoreme beim Ableiten benutzt, bekommt man als Schranke sogar $1/100$.

b)

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)\cdot\frac{x^{2k+1}}{x^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)\cdot x^{2k-1} \qquad \textbf{[2 Punkte]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)\cdot x^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k}{(2k+1)!}\right)\cdot x^{2k-1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:
Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Gegeben sei ein Draht, der durch die Kurve

$$c : [0; \frac{\pi}{8}] \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad c : t \longmapsto \Big(\sin(t) + \cos(t),\ \sin(t) - \cos(t),\ \sqrt{2} \cdot t\Big)^T$$

beschrieben wird. Die Dichte des Drahtes sei gegeben durch

$$\rho(x, y, z) = \frac{1 + \sqrt{2}z}{x^2 + y^2 + 4z^2}.$$

Bestimmen Sie die Masse des Drahtes.

Hinweis zur Kontrolle: das zu berechnende Integral ist $\displaystyle\int_{\dots}^{\dots} \frac{1 + 2t}{1 + 4t^2} dt$

Lösung zur Aufgabe 2:

$$\dot{c}(t) = \Big(\cos(t) - \sin(t),\ \cos(t) + \sin(t),\ \sqrt{2}\Big)^T \qquad [1 Punkt]$$

$$\begin{aligned} \|\dot{c}\|^2 &= (\cos(t) - \sin(t))^2 + (\cos(t) + \sin(t))^2 + (\sqrt{2})^2 \qquad [1 Punkt] \\ &= \cos^2(t) - 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + 2 \\ &= 4 \qquad [1 Punkte] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(c(t)) &= \frac{1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot t}{(\sin(t) + \cos(t))^2 + (\sin(t) - \cos(t))^2 + 4 \cdot 2t^2} \\ &= \frac{1 + 2t}{2 + 8t^2} \qquad [2 Punkte] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Masse} = M &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \rho(c(t)) \cdot \|\dot{c}\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1 + 2t}{2 + 8t^2} \cdot 2\, dt \qquad [1 Punkt] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1 + 2t}{1 + 4t^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{1 + 4t^2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{2t}{1 + 4t^2} dt \qquad [1 Punkte] \\ & \text{Substitution: } u = 2t \Rightarrow du = 2dt,\ y = 1 + 4t^2,\ dy = 8t\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{2} + \frac{1}{4} \int_1^{1+\frac{\pi^2}{16}} \frac{1}{y} dy \qquad [2 Punkte] \\ &= \frac{1}{2} [\arctan(u)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{4} \ln(y)\right]_1^{1+\frac{\pi^2}{16}} \qquad [1 Punkt] \\ &= \frac{1}{2} \arctan(\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{4} \ln(1 + \frac{\pi^2}{16}) \end{aligned}$$