Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen.

Satz: Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.

Beweis: Für einen Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ einer Kurve c gilt

$$\begin{aligned}
\int_{c \circ h} f(x)\, ds &= \int_\alpha^\beta f(c(h(\tau))) \left\| \frac{d}{d\tau} c(h(\tau)) \right\| d\tau \\
&= \int_\alpha^\beta f(c(h(\tau))) \, \|\dot{c}(h(\tau))\| \, h'(\tau)\, d\tau \\
&= \int_a^b f(c(t)) \, \|\dot{c}(t))\| \, d\tau \\
&= \int_c f(x)\, ds
\end{aligned}$$

Beispiel.

Betrachte einen krummlinigen mit Masse belegten Draht, beschrieben durch eine $\mathcal{C}^1$–Kurve c und mit der (inhomogenen) Massendichte ρ.

- Für die Gesamtmasse des Drahtes bekommt man

$$\int_c \rho(x)\, ds = \int_a^b \rho(c(t)) \, \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

- Der Schwerpunkt des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x) x \, ds}{\int_c \rho(x)\, ds}$$

- Das Trägheitsmoment des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x) r^2(x)\, ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist.

Kapitel 10. Fourier–Analysis

10.1. Grundlegende Begriffe

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) heißt periodisch mit der Periode T (oder T–periodisch), falls

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ziel: Entwicklung einer periodischen Funktion f in eine Fourier–Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Grundschwingungen: $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$

Oberschwingungen: $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 2, 3, \ldots$

Bemerkungen.

- Ist T eine Periode von f, so ist auch kT, $k \in \mathbb{Z}$, eine Periode.
- Sind T_1 und T_2 Perioden, so sind auch

  $$k_1 T_1 + k_2 T_2 \qquad \text{für } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

  Perioden von f.
- Existiert eine kleinste positive Periode $T > 0$ von f, so ist die Menge der Perioden gegeben durch kT, $k \in \mathbb{Z}$. Jede nichtkonstante, stetige und periodische Funktion besitzt eine solche kleinste Periode.
- Sind $f(t)$ und $g(t)$ T–periodisch, so ist auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, T–periodisch.
- Ist $f(t)$ T–periodisch und integrierbar (über kompakten Intervallen), so gilt

  $$\int_0^T f(t)\, dt = \int_a^{a+T} f(t)\, dt$$

  für beliebige $a \in \mathbb{R}$.

Periodische Fortsetzungen.

Definition: Eine Funktion $g(t)$, $t \in [0, T]$ bzw. $t \in [0, T/2]$ läßt sich zu einer T–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt fortsetzen.

- Direkte Fortsetzung.

$$f(t) := g(t - kT), \quad kT \le t < (k+1)T$$

- Gerade Fortsetzung. Sei $g(t)$ auf $[0, T/2]$ gegeben. Dann setze

$$f(t) := g(t - kT), \quad \text{für } \left(\frac{2k-1}{2}\right) T \le t < \left(\frac{2k+1}{2}\right) T$$

  wobei g zunächst an der y–Achse gespiegelt wird:

$$g(t) := g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \le t < 0.$$

- Ungerade Fortsetzung. Wie oben, aber Spiegelung am Ursprung:

$$g(t) := -g(-t), \quad \text{für } -\frac{T}{2} \le t < 0$$

Fourier–Reihen und trigonometrische Polynome.

Definition:

- Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \; a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

  heißt Fourier–Reihe (oder trigonometrische Reihe). Dabei sei

$$\omega = \frac{2\pi}{T} > 0.$$

- Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)], \; a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})$$

  der Fourier–Reihe heißen trigonometrische Polynome vom Grad n.

Komplexe Schreibweise der Fourier–Reihe.

- Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

womit

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

- Damit lassen sich die trigonometrischen Polynome wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}\right] \end{aligned}$$

Komplexe Schreibweise der Fourier–Reihe.

- Somit kann man die trigonometrischen Polynome schreiben als

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit den Koeffizienten

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k),$$

womit gilt: $a_0 = 2\gamma_0, \quad a_k = \gamma_k + \gamma_{-k}, \quad b_k = i(\gamma_k - \gamma_{-k}).$

- Für die Darstellung der Fourier–Reihe bekommt man

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Wichtige Frage: Konvergiert die Fourier–Reihe (punktweise oder gleichmäßig)?

Orthonormalität der Basisfunktionen.

Satz: Die Funktionen $e^{ik\omega t}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, bilden ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarprodukts:

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \overline{u(t)}v(t)\,dt$$

Beweis: Einerseits gilt

$$\langle e^{-ik\omega t}, e^{ik\omega t}\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t}e^{-ik\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T dt = 1,$$

andererseits haben wir

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{il\omega t}\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(l-k)\omega t}\,dt = \frac{1}{i(l-k)\omega}e^{i(l-k)\omega t}\Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

für $k \neq l$.

Berechnung der Fourier–Koeffizienten.

Satz: Konvergiert die Fourier–Reihe

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ik\omega t}$$

auf $[0, T]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f(t)$, so ist f stetig und es gilt:

$$\gamma_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Da f_n stetig und gleichmäßig gegen f konvergieren, ist f stetig. Weiterhin:

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)e^{-il\omega t}\,dt &= \int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_k e^{ik\omega t}e^{-il\omega t}\,dt \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_k\int_0^T e^{ik\omega t}e^{-il\omega t}\,dt = \gamma_l \cdot T.\end{aligned}$$