Berechnung der Bogenlänge einer $\mathcal{C}^1$–Kurve.

Satz: Jede $\mathcal{C}^1$–Kurve ist rektifizierbar und es gilt

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beweisskizze: Zunächst gilt die Darstellung

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \leq \tau_{k_j} \leq t_{j+1}$, sodass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = c_k'(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

somit

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k'(\tau_{k_j}))^2} (t_{j+1} - t_j) \right)$$

Beispiel.

Berechne die Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) &= (r(1 - \cos t), r \sin t))^T \\
\|\dot{c}(t)\| &= r\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2r \sin \frac{t}{2} \\
L(c) &= 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = 8r
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer $\mathcal{C}^1$–Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung, denn es gilt

$$L(c \circ h) = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\| \, d\tau = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))\| h'(\tau) \, d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt = L(c)$$

Die Bogenlängenfunktion einer $\mathcal{C}^1$–Kurve.

Definition: Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve.

- Die Funktion
$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$
heißt die Bogenlängenfunktion von c.
- Ist c glatt, so ist $S : [a, b] \to [0, L(c)]$ ein $\mathcal{C}^1$–Parameterwechsel.
- Die Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, ist dann ebenfalls ein $\mathcal{C}^1$–Parameterwechsel.
- Die entsprechende Parametrisierung
$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)), \quad 0 \leq s \leq L(c)$$
von c nennt man die Parametrisierung nach der Bogenlänge.

Eigenschaften der Bogenlängenparametrisierung.

Bemerkung: Für die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ gilt:

- Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch
$$\tilde{c}\,'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$
Daher ist $\tilde{c}\,'(s)$ ist ein Einheitsvektor, d.h. mit dieser Parametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen. Weiterhin ist $\tilde{c}\,'(s)$ der Einheitstangentenvektor von c.
- Aus $\langle \tilde{c}\,'(s), \tilde{c}\,'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation
$$\langle \tilde{c}\,''(s), \tilde{c}\,'(s) \rangle = 0$$
d.h. der Beschleunigungsvektor $\tilde{c}\,''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{c}\,'(s)$.

Hauptnormale und Krümmung.

Definition: Sei $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ die Bogenlängenparametrisierung der Kurve c.

- Dann bezeichnet man den Vektor
$$n(s) := \frac{\tilde{c}\,''(s)}{\|\tilde{c}\,''(s)\|}$$
als den Hauptnormalenvektor von c.
- Die Funktion
$$\kappa(s) := \|\tilde{c}\,''(s)\|, \quad 0 \le s \le L(c)$$
nennt man die Krümmung der Kurve c.

Beispiel: Mit der Parametrisierung des Einheitskreises nach der Bogenlänge:
$$\begin{aligned}\tilde{c}(s) &= (\cos s, \sin s), \quad 0 \le s \le 2\pi \\ n(s) &= \tilde{c}\,''(s) = -(\cos s, \sin s) \\ \kappa(s) &= 1\end{aligned}$$

Parametrisierungen von Funktionsgraphen.

Betrachte den Graph von $y = y(x)$ als Kurve im $\mathbb{R}^2$, d.h. $c(x) = (x, y(x))^T$:
$$\begin{aligned} c'(x) &= (1, y'(x))^T & ds &= \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \\ L(c) &= \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx & \kappa(x) &= \frac{|y''(x)|}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3}\end{aligned}$$

Betrachte analog für $y(x)$ und $z(x)$ die Kurve $c(x) = (x, y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^3$:
$$\begin{aligned} c'(x) &= (1, y'(x), z'(x))^T \\ ds &= \sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2}\,dx \qquad (\text{Bogenlängenelement}) \\ L(c) &= \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2+(z'(x))^2}\,dx \\ \kappa(x) &= \frac{\sqrt{(1+(y')^2+(z')^2)((y'')^2+(z'')^2)-(y'y''+z'z'')^2}}{(\sqrt{1+(y')^2+(z')^2})^3}\end{aligned}$$

Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

Für die Polarkoordinaten $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$ im $\mathbb{R}^2$ gilt für $a \leq t \leq b$:

$$c(t) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T, \qquad L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\, dt$$

Für die Kugelkoordinaten $r = r(t), \varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t)$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned} c(t) &= (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)^T \quad \text{für } a \leq t \leq b \\ L(c) &= \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2\psi + r^2\dot{\psi}^2}\, dt \end{aligned}$$

Beispiel: Betrachte die Kardiode (Herzlinie) in Polarkoordinaten:

$$r = a(1 + \cos\varphi) \quad \text{für } a > 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Für den Umfang (d.h. Bogenlänge) der Kardiode gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 8a$$

Die von einer Kurve umschlossene Fläche.

Satz: Für die von einer $\mathcal{C}^1$–Kurve $c(t) = (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2$ überstrichene Fläche gilt:

$$F(c) = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt$$

Beweisskizze: Summiere für eine Zerlegung $Z = \mathbf{Z}[a, b]$ über die Flächen

$$|F_i| = \frac{1}{2}\|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i) \qquad \text{für } 0 \leq i \leq m-1.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(Z) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1}y_i}{t_{i+1} - t_i}\Delta t_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(x_i\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}y_i\right)\Delta t_i \\ &\to \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\, dt \end{aligned}$$

Beispiel: Die Archimedische Spirale.

Die **Archimedische Spirale** in Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$x = a\varphi\cos\varphi, \quad y = a\varphi\sin\varphi \quad \text{für } a > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2}\, d\varphi \\ &= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 4.158a \end{aligned}$$

und mit $x\dot{y} - \dot{x}y = r^2\dot{\varphi}$ gilt

$$F = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2\, d\phi \approx 1.292a^2$$

Kapitel 9. Anwendungen der Integralrechnung

9.3. Kurvenintegrale

Definition: Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, eine stetige Funktion und $c : [a,b] \to D$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve. Dann wird des Kurvenintegral (oder Linienintegral) von $f(x)$ längs c definiert durch

$$\int_c f(x)\, ds := \int_a^b f(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

Notation: Für eine **geschlossene** Kurve schreibt man auch

$$\oint_c f(s)\, ds$$

Satz: Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der betrachteten Kurve.