Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz.

Satz: Sei $f(x,y)$ stetig und nach x stetig (partiell) differenzierbar. Weiterhin seien die uneigentlichen Integrale

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

auf (allen) kompakten Teilmengen von I gleichmäßg konvergent. Dann ist auch $F(x)$ stetig differenzierbar, und die Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ läßt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewinnen, d.h. es gilt

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$$

Beweis: Analog wie im Fall von eigentlichen Integralen.

Beispiel: Die Ableitung der Gamma–Funktion:

$$\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma'(x) := \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\cdot \ln t\,dt$$

Kapitel 9. Anwendungen der Integralrechnung

9.1. Rotationskörper

Betrachte für eine Funktion $f(x)$ die Rotation des Funktionsgraphen $y = f(x)$ um die x–Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Dann gilt für die Querschnittsfläche

$$Q(x) = \pi(f(x))^2 \qquad \text{für } x \in [a,b].$$

Damit ergibt sich für den entstehenden Rotationskörper die Volumenformel

$$V_{rot} = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Prinzip von Cavalieri: Haben zwei Körper die jeweils gleiche Querschnittsfläche, so stimmen ihre Volumina überein.

Beispiel.

Durch die Rotation der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{mit } a, b > 0$$

um die x–Achse erhält man ein Rotationsellipsoid mit dem Volumen

$$\begin{aligned} V_{rot} &= \pi \int_{-a}^{a} \left[b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right]^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) dx = \frac{4}{3}\pi a b^2 \end{aligned}$$

Speziell bekommt man für $a = b = r$ das Volumen

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

der Kugel um Null mit Radius $r > 0$.

Die Oberfläche eines Rotationskörpers.

Für die Oberfläche (Mantelfläche) eines Rotationskörpers gilt die Formel

$$O_{rot} = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

Beispiel: Für die Oberfläche der Kugel um Null mit Radius $r > 0$ gilt mit

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Formel

$$O_{rot} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4\pi r^2$$

9.2. Kurven und Bogenlänge

Definition: Sei $c = (c_1, \ldots, c_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

- Dann wird c als Kurve im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet; $c(a)$ heißt Anfangspunkt, $c(b)$ heißt Endpunkt von c. c heißt geschlossene Kurve, falls $c(a) = c(b)$.
- Falls $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion ist, d.h. jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ ist stetig differenzierbar, so heißt $c(t)$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve.
- $c(t)$ heißt stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve, falls es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

  gibt, so dass $c(t)$ auf jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion ist.
- Die Kurve c heißt glatt, falls

$$\frac{d}{dt}c(t) := \dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \ldots, \dot{c}_n(t))^T \neq 0 \qquad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Beispiele.

- Die Kurve

$$c(t) := (\cos t, \sin t)^T \qquad t \in [0, 2\pi]$$

  beschreibt einen Kreis im $\mathbb{R}^2$.

- Die Kurve

$$c(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))^T$$

  beschreibt eine Zykloide.
  Wegen

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos t), r \sin t)^T$$

  ist die Kurve an den Stellen $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt.

- Die Kurve

$$c(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t), ht)^T \qquad t \in \mathbb{R}$$

  beschreibt eine Schraubenlinie (Helix) mit Radius r und Ganghöhe h.

Umparametrisierung von Kurven.

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die Kurve

$$(c \circ h)(\tau) = c(h(\tau)) \quad \text{für } \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und den gleichen Durchlaufsinn wie die Kurve c.

Bemerkungen:

- Man nennt $t = h(\tau)$ eine Umparametrisierung (Parameterwechsel). Kurven c und $c \circ h$ werden als gleich angesehen.
- Im Fall einer $\mathcal{C}^1$–Kurve werden nur $\mathcal{C}^1$–Parameterwechsel zugelassen.
- Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ läßt sich als eine Kurve auffassen:

  $$c(x) := (x, f(x))^T \quad \text{für } a \leq x \leq b$$

  bzw. $c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T$ für $0 \leq t \leq 1$.

Die Bogenlänge einer Kurve.

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \cdots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

ist eine untere Schranke für die Bogenlänge der Kurve $c(t)$.

Definition: Ist die Menge $\{L(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve c rektifizierbar, und in diesem Fall ist

$$L(c) := \sup\{L(Z) \,:\, Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \to 0} L(Z)$$

die Länge der Kurve c.