Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in
$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$
- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$
und somit durch Substitution in
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Kapitel 8. Integration

8.5. Uneigentliche Integrale

Ziel: Berechne uneigentliche Integrale, d.h.

- Integrale über unbeschränkten Bereichen
$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \quad \int_\infty^\infty f(x)\,dx$$
- Integrale über unbeschränkten Funktionen mit Singularitäten am Rand
$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{wobei } f : (a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig oder } f : [a,b) \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar, falls sie über jedem kompakten Teilintervall $[a, b] \subset D$ integrierbar ist.

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $[a, \infty)$ bzw. $(-\infty, b]$ bzw. $(-\infty, \infty)$, so definiert man

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)\,dx &:= \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^b f(x)\,dx &:= \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx &:= \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Bemerkung: Der Cauchysche Hauptwert ist definiert als

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{x\to\infty} \int_{-x}^x f(x)\,dx$$

und im Allgemeinen nicht identisch mit obigem Integral!

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ bzw. (a, b), so definiert man

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &:= \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(x)\,dx \\
\int_a^b f(x)\,dx &:= \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(x)\,dx \\
\int_a^b f(x)\,dx &:= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Ein Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha > 1 \\[2ex] \ln|x| + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$.

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}\,dx.$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}\,dx = -\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \int_0^y xe^{-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{y^2} e^{-u}\,du \quad \text{mit } u = x^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-y^2}\right) \to \frac{1}{2} \quad \text{für } y \to \infty \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2}\,dx = 1$$

Konvergenzkriterien.

Satz: Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gilt

a) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; : \; \exists C > a \; : \; \forall z_1, z_2 > C \; : \; \left| \int\limits_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

b) Ist das uneigentliche Integral absolut konvergent, d.h.

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

konvergiert, so konvergiert auch das uneiegntliche Integral

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

Majorantenkriterium.

Satz: Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann gilt

c)

$$\forall x \; : \; |f(x)| \leq g(x) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{konvergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{absolut konvergent}$$

d) Weiter gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x \; : \; 0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{divergent}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{divergent}$$

Beispiel: Das Dirichlet–Integral.

Betrachte das Dirichlet–Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Das Dirichlet–Integral ist konvergent, denn es gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

und somit

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \leq \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{2}{y_1} \longrightarrow 0 \quad \text{für } y_1 \to \infty.$$

Das Dirichlet–Integral besitzt den Wert $I = \pi/2$, ist aber nicht absolut konvergent.

Beispiel: Das Exponentialintegral.

Betrachte das Exponentialintegral

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad \text{für } x < 0.$$

Wegen $\lim_{t\to-\infty} te^t = 0$ gibt es ein $C > 0$ mit $|te^t| \leq C$ für alle $t \in (-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left|\frac{e^t}{t}\right| = \frac{|te^t|}{t^2} \leq \frac{C}{t^2}.$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\, dt$$

folgt die absolute Konvergenz des Exponentialintegrals $\mathrm{Ei}(x)$ für alle $x < 0$ aus dem Majorantenkriterium.

Beispiel: Die Gamma–Funktion.

Die Gamma–Funktion $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

Beachte: Für $0 < x < 1$ ist der Integrand von $\Gamma(x)$ singulär. Mit

$$|e^{-t} t^{x-1}| \leq t^{x-1} \qquad \text{für } 0 < t \leq 1$$

folgt jedoch in diesem Fall

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x}(1 - \varepsilon^x) \to \frac{1}{x} \qquad \text{für } \varepsilon \to 0+ .$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral.

Beispiel: Die Gamma–Funktion.

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral:

$$|e^{-t} t^{x-1}| = \left| \frac{e^{-t} t^{x+1}}{t^2} \right| \leq \frac{C}{t^2} \qquad \text{für } 1 \leq t \leq \infty.$$

Mit dem Majorantenkrierum folgt die absolute Konvergenz von $\Gamma(x)$ für $x > 0$.

Bemerkung: Die Gamma–Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{für } x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Folgerung: Es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

8.6. Parameterabhängige Integrale

Beispiel: Die Gamma–Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty f(x,t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Zunächst: Parameterabhängige *eigentliche* Integrale.
Sei $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, sodass f für festes $x \in I$ als Funktion von y integrierbar über $[a,b]$ ist:

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy$$

Fragen:

1) Ist die Funktion $F(x)$ *stetig*, wenn $f(x,y)$ stetig ist?
2) Ist die Funktion $F(x)$ *differenzierbar*, wenn $f(x,y)$ nach x differenzierbar ist?

Satz: Ist $f(x,y)$ stetig auf $I \times [a,b]$, so existiert das Integral

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)\,dy$$

für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist stetig auf I.

Beweis: Sei $x_0 \in I_0 \subset I$, so dass $I_0 \subset I$ kompakt. Dann ist $f(x,y)$ auf dem Kompaktum $I_0 \times [a,b]$ gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon \quad \text{für } x, x_0 \in I_0 \text{ und alle } y \in [a,b].$$

Mit diesem δ und $|x - x_0| < \delta$ für $x, x_0 \in I_0$ folgt dann

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^b (f(x,y) - f(x_0,y))dy \right| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x_0,y)|dy < \varepsilon(b-a)$$

Somit ist F stetig in x_0. Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I stetig.

Differenzierbarkeit parameterabhängiger Integrale.

Satz: Ist $f(x,y)$ stetig auf $I \times [a,b]$ und nach x stetig (partiell) differenzierbar, so ist auch $F(x)$ auf dem Intervall I stetig differenzierbar, und es gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Beweis: Für $x, x_0 \in I$, $x \neq x_0$, folgt nach dem Mittwelwertsatz

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0}\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy \quad \text{für ein } \xi \in [x_0,x],$$

und damit weiterhin

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \lim_{\xi\to x_0} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\,dy$$

Somit ist F in x_0 differenzierbar.
Da x_0 beliebig gewählt, ist F auf ganz I differenzierbar.

Zwei Beispiele.

Beispiel 1:

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx)\,dt$$

Beispiel 2: Die Bessel–Funktion

$$\begin{aligned} J_n(x) &:= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z} \\ J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \cdot \sin(x\sin t - nt)\,dt \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t \cdot \cos(x\sin t - nt)\,dt \end{aligned}$$

Die Funktion $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, ist (eine) Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

Parameterabhängige uneigentliche Integrale.

$$F(x) := \int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \text{für } x \in I.$$

Beispiel: Die Gamma–Funktion:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$$

Definition: Das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy \qquad \text{für } x \in I$$

heißt gleichmäßig konvergent, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C > a$ gibt mit

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } x \in I \text{ und für alle } y_1, y_2 \geq C.$$

Das Majorantenkriterium.

Bemerkung: Es gilt das Majorantenkriterium, wonach das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dy$$

gleichmäßig und absolut konvergiert, falls es eine (gleichmäßige) Majorante $g(y)$ von $f(x,y)$ gibt mit

$$|f(x,y)| \leq g(y) \quad \text{und} \quad \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty \qquad \text{für alle } x, y \in I.$$

Beweis:

$$\left| \int_a^\infty f(x,y)\,dy \right| \leq \int_a^\infty |f(x,y)|\,dy \leq \int_a^\infty g(y)\,dy < \infty$$