Riemannsche Summen.

Definition: Jede Summe der Form

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad \text{für } x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$$

nennt man eine Riemannsche Summe der Zerlegung Z,

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die Untersumme von $f(x)$ zur Zerlegung Z,

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup f([x_i, x_{i+1}])\,(x_{i+1} - x_i)$$

nennt man die Untersumme von $f(x)$ zur Zerlegung Z.

Eigenschaften von Riemannschen Summen.

Beobachtung: Aus den Definitionen folgt direkt:

- Für *feste* Zerlegungen gilt stets

$$U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$$

- Ist Z_1 eine *feinere* Zerlegung als Z_2, d.h. $Z_2 \subset Z_1$, dann gilt

$$U_f(Z_2) \leq U_f(Z_1) \quad \text{und} \quad O_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

- Für zwei *beliebige* Zerlegungen Z_1 und Z_2 gilt daher stets

$$U_f(Z_1) \leq O_f(Z_2)$$

und

$$U_f(Z_2) \leq O_f(Z_1)$$

Das Riemannsche Integral.

Beobachtung: Es existieren die Grenzwerte (über immer feinere Zerlegungen):

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \;:=\; \sup\{U_f(Z) \;:\; Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \text{(Unterintegral)}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \;:=\; \inf\{O_f(Z) \;:\; Z \in \mathbf{Z}[a,b]\} \qquad \text{(Oberintegral)}$$

Definition: Eine Funktion $f(x)$ heißt (Riemann–)integrierbar über $[a,b]$, falls Unter– und Oberintegral übereinstimmen, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

das (Riemann–)Integral von $f(x)$ über $[a,b]$.

Beispiele zum Riemann–Integral.

Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist integrierbar, denn

$$U_f(Z) = O_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} c\,(x_{i+1} - x_i) = c\,(b-a)$$

und somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$$

Für $f(x) = x$, $0 \le x \le 1$, und $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ gilt

$$U_f(Z_n) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$O_f(Z_n) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

und somit

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

Weitere Beispiele zum Riemann–Integral.

- Betrachte
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & : \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
Dann gilt für **jede** Zerlegung: $\quad U_f(Z) = 0, \quad O_f(Z) = 1.$
Somit ist die Funktion **nicht** integrierbar.

- Betrachte
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \neq c \\ 1 & : \quad x = c \end{cases}$$
für $a \leq c \leq b$. Dann ist die Funktion f integrierbar mit
$$\int_a^b f(x)\, dx = 0,$$
denn es gilt
$$U_f(Z) = 0 \qquad 0 < O_f(Z) \leq 2\|Z\|$$

Eigenschaften des Riemann–Integrals.

Satz: Seien $f(x)$ und $g(x)$ integrierbar über $[a, b]$. Dann gilt:

a) Für $a \leq c \leq b$ ist f über $[a, b]$ integrierbar, genau dann wenn f über $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar ist, und es gilt
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

b) Linearität: Mit f und g ist auch $\alpha f(x) + \beta g(x)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ integrierbar:
$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

c) Positivität: Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt
$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

d) Monotonie: Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt:
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

Standardabschätzungen zum Riemann–Integral.

Satz: Sei f integrierbar über $[a, b]$. Dann gelten die Abschätzungen

$$(b-a)\cdot\inf(f[a,b]) \le \int_a^b f(x)\,dx \;\le\; (b-a)\cdot\sup(f[a,b])$$

und weiterhin

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (b-a)\cdot\sup\{|f(x)| \,:\, a\le x\le b\}$$

Falls $|f(x)|$ integrierbar ist, so gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)| dx$$

Beweis des letzten Satzes.

Für die Zerlegung $Z = \{a, b\}$ von $[a, b]$ folgt sofort

$$\begin{aligned}\inf(f[a,b])\cdot(b-a) = U_f(Z) \;&\le\; \int_a^b f(x)\,dx\\ &\le\; O_f(Z) = \sup(f[a,b])\cdot(b-a)\end{aligned}$$

Weiterhin folgt wegen $\pm f(x) \le |f(x)|$, für alle $x \in [a, b]$, die Ungleichung

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \;&\le\; \int_a^{\underline{b}} |f(x)|\,dx\\ &\le\; O_{|f|}(Z) = \sup\{|f(x)| \,:\, a\le x\le b\}\cdot(b-a)\end{aligned}$$

Bemerkung: Die obige Abschätzung

$$\inf(f[a,b])\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx$$

liefert insbesondere die Positivtät des Integrals.

Weitere Bemerkungen.

- Die Aussage
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
gilt für beliebige Anordnungen von a, b, c.
Wir definieren daher
$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$
sowie
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

- Ist $f(x)$ integrierbar, so gilt
$$R_f(Z_m) \to \int_a^b f(x)\,dx$$
für alle Zerlegungsfolgen $\{Z_m\}_m \subset \mathbf{Z}[a,b]$ mit $\|Z_m\| \to 0$ für $m \to \infty$.

Kapitel 8. Integration

8.2. Kriterien für Integrierbarkeit

Satz: (Riemannsches Kriterium)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind äquivalent

a) $f(x)$ ist integrierbar über $[a,b]$.

b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ mit $O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon$.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ mit

$$\begin{aligned} 0 &\le O_f(Z) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon/2, \\ 0 &\le \int_{\overline{a}}^b f(x)\,dx - U_f(Z) < \varepsilon/2, \end{aligned}$$

a) $\to$ b): Folgt aus der Addition der beiden Ungleichungen.
b) $\to$ a): Die Integrierbarkeit von f folgt direkt aus b) mit

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \int_{\overline{a}}^b f(x)\,dx \le O_f(Z) - U_f(Z) < \varepsilon.$$

Beschränkte monotone Funktionen sind integrierbar.

Satz: Eine beschränkte monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis: Für eine uniforme Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b-a), \quad 0 \leq j \leq n,$$

und für f monoton wachsend gilt

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

für hinreichend großes n. Nach dem Riemanschen Kriterium ist f integrierbar. Analog zeigt man die Integrierbarkeit für f monoton fallend.

Stetige Funktionen sind integrierbar.

Satz: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar über $[a, b]$..

Beweis: f ist sogar gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$. Daher gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a, b]$ mit Feinheit $\|Z\| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sup f[x_j, x_{j+1}] - \inf f[x_j, x_{j+1}]) \cdot (x_{j+1} - x_j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_{j+1} - x_j) = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist f nach dem Riemannschem Kriterium integrierbar.