6.3. Elementare Funktionen

Die Exponentialfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} z^k,$$

hat Konvergenzradius $r = \infty$, und daher ist $\exp(z)$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ stetig.
Für reelle Argumente ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x), \qquad \exp(0) = 1$$

Anfangswertproblem für gewöhnliche Diferentialgleichung.
Suche zu $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y(x)$ mit

$$y'(x) = a \cdot y(x), \quad y(x_0) = y_0$$

Die (eindeutige) Lösung dieses Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = y_0 \cdot \exp(a \cdot (x - x_0))$$

Funktionalgleichung: Es gilt

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}$$

Folgerung:

Für die Exponentialfunktion gilt:

1) $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
2) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
3) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
4) Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Für die Exponentialfunktion gilt weiterhin:

5)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

6) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

7) Für die Eulersche Zahl $e := \exp(1)$ gilt: Es gilt:

$$\begin{aligned} e &:= \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ e &= 2.7182\,81828\,45904\,52353\,60287\,\ldots \end{aligned}$$

Die Eulersche Zahl ist e eine irrationale Zahl.

8) Es gilt $\exp(qx) = (\exp(x))^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Der natürliche Logarithmus.

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, besitzt

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$$

eine eindeutige Umkehrfunktion,

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

Diese Umkehrfunktion nennt man den natürlichen Logarithmus.

Eigenschaften:

1) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

2) Es gilt: $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$.

3) Es gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

Weitere Eigenschaften des Logarithmus.

4) Potenz:

$$\ln(x^q) = q \cdot \ln x \quad \text{für alle } x > 0,\ q \in \mathbb{Q}.$$

5) Spezielle Funktionswerte:

$$\ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad \ln(e) = 1$$

6) Der natürliche Logarithmus ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x > 0.$$

7) Es gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

Die allgemeine Potenzfunktion.

Für $a > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ hatten wir

$$a^q = \exp(q \cdot \ln a)$$

Wir definieren daher allgemeine Potenzen wie folgt.

$$a^z := \exp(z \cdot \ln a) \quad \text{für } a > 0,\ z \in \mathbb{C}$$

Eigenschaften der allgemeinen Potenzfunktion.

1) Die Funktion $f(x) = a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$.

2) Es gilt:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

sowie

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

Weitere Eigenschaften der allgemeinen Potenz.

3) Für $a \neq 1$ besitzt $y = a^x$ eine Umkehrfunktion

$$y(x) = \log_a x$$

den Logarithmus zur Basis a, wobei gilt

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{für } x > 0$$

4) Es gelten die Differentiationsregeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x) &= \ln a \cdot a^x \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ a > 0 \\ \frac{d}{dx}(x^a) &= a x^{a-1} \quad \text{für } a \in \mathbb{R},\ x > 0 \\ \frac{d}{dx}(\log_a x) &= \frac{1}{x \ln a} \quad \text{für } x, a > 0. \end{aligned}$$

Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.

Satz: Es gilt

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad \text{für } a \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1$$

mit

$$\binom{a}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (a - j) \quad \text{für } k \geq 0$$

Beweisidee: Rechte Seite löst die Differentialgleichung $(1+x)g'(x) = a \cdot g(x)$.

Spezialfälle. Für $-1 < x < 1$ gelten die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \ldots \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - + \ldots \end{aligned}$$

Hyperbolische Funktionen.

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \cosh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \\ \sinh(z) &:= \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \end{aligned}$$

mit den entsprechenden Potenzreihenentwicklungen

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \\ \sinh(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \end{aligned}$$

die aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion folgen.

Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen.

1) Die Funktion cosh ist gerade und sinh ungerade, d.h. es gilt

$$\cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{und} \quad \sinh(-z) = -\sinh(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

2) Für die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

3) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \end{aligned}$$

4) Es gilt die algebraische Relation

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Inverse hyperbolische Funktionen, Areafunktionen.

Die Funktion sinh ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, die Funktion cosh ist streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

Die jeweiligen Umkehrfunktionen bezeichnen wir mit arcosh und arsinh.

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{für } 1 \leq x < \infty \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{für } 1 \leq x < \infty \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Funktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \end{aligned}$$

Die Funktionen sin und cos besitzen jeweils Konvergenzradius $r = \infty$, sind somit auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt und dort stetig.

Eigenschaften:

1) sin ist eine ungerade, cos eine gerade Funktion, d.h. es gilt

$$\sin(-z) = -\sin(z) \quad \text{und} \quad \cos(-z) = \cos(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

2) Weiterhin gilt: $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.

Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

3) Es gilt:

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \cos z + i\sin z, \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z \\
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = (\sin x\cosh y) + i(\cos x\sinh y) \\
\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = (\cos x\cosh y) - i(\sin x\sinh y) \\
\sin^2 z + \cos^2 z &= 1
\end{aligned}$$

4) Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned}
\sin(u+v) &= \sin u\cos v + \cos u\sin v \\
\cos(u+v) &= \cos u\cos v - \sin u\sin v
\end{aligned}$$

5) Für die reellen Ableitungen bekommt man

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Tangens– und Kotangensfunktionen.

Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \left(z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\
\cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z} \qquad (z \neq k\pi)
\end{aligned}$$

Eigenschaften:

1) tan und cot sind π–periodische, ungerade Funktionen.
2) Es gilt

$$\begin{aligned}
\tan z &= -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \text{für } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\
\cot z &= i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad \text{für } z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Reihen–Entwicklung von Tangens und Kotangens.

Es gelten die Reihen–Entwicklungen

$$\begin{aligned}\tan z &= z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \quad \text{für } |z| < \frac{\pi}{2} \\ \cot z &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \dots \\ &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}|B_{2k}|z^{2k-1} \quad \text{für } 0 < |z| < \pi\end{aligned}$$

mit den Bernoullischen Zahlen B_{2k}.

Reelle Ableitungen: Im jeweiligen Definitonsbereich gilt

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Kapitel 7. Interpolation

7.1. Problemstellung

Gegeben: Diskrete Werte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an $n+1$ Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n.$$

Eingabedaten: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$.

Gesucht: Einfache Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Daten interpoliert, d.h.

$$p(x_i) = f_i \quad \text{für alle } i = 0, 1, \dots, n.$$

Zum Beispiel: p Polynom, trigonometrisches Polynom, rationale Funktion.

Fragen:

1. Gibt es so ein p? Falls ja, ist p eindeutig?
2. Wie sieht die Lösung p aus und wie berechnet man p?