Quadraturfehler der Newton–Cotes Formeln.

$R_n[f] := I_n[f] - I[f]$ heißt Quadraturfehler der Quadraturformel $I_n[f]$.

Erinnerung: Darstellung für den Interpolationsfehler

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Beispiel: Für den Quadraturfehler der Trapezregel ($n = 1$) gilt

$$\begin{aligned} R_1[f] &= \int_a^b (p_1(x) - f(x))\,dx = -\int_a^b \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)\,dx \\ &= -\frac{f^{(2)}(\tilde{\xi})}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \frac{1}{12} f^{(2)}(\tilde{\xi})(b-a)^3 \end{aligned}$$

Zusammengesetzte Newton–Cotes Formeln.

Ziel: Höhere Genauigkeit durch Unterteilung des Intervalls $[a, b]$.

Gegeben sei die äquidistante Unterteilung mit den Knoten

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

Verwende auf jedem Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$ Quadraturformel der Ordnung n.

Beispiel: Zusammengesetzte Trapezregel

$$\begin{aligned} T(h) &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2}\Big(f(x_i) + f(x_{i+1})\Big) \\ &= h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2}\right) \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung der zusammengesetzten Trapezregel.

Satz: Für die zusammengesetzte Trapezregel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| \le \frac{h^2}{12}(b-a)\|f^{(2)}\|_\infty$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\,dx - T(h) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)\,dx - I_1^{(j)}[f] \right) \right| \\ &\le \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(t_{j+1}-t_j)^3}{12} \|f^{(2)}\|_\infty \\ &\le \frac{N}{12} h^3 \|f^{(2)}\|_\infty = \frac{h^2}{12}(b-a)\|f^{(2)}\|_\infty \end{aligned}$$

Die zusammengesetzte Simpson–Regel.

Wende die Simpson–Regel auf die Teilintervalle $[t_{2i}, t_{2i+2}]$ an, mit Knoten

$$t_{2i}, \quad t_{2i+1}, \quad t_{2i+2} \qquad \text{für } 0 \le i \le N/2 - 1$$

wobei N gerade.
Dann bekommt man die zusammengesetzte Simpson–Regel

$$\begin{aligned} S(h) &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N/2-1} (f(t_{2i}) + 4f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})) \\ &= \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 4f(b-h) + f(b)) \end{aligned}$$

Satz: Für die zusammengesetzte Simpson–Regel gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(h) \right| \le \frac{h^4}{2880}(b-a)\|f^{(4)}\|_\infty$$

11.2. Gauß–Quadratur

Erinnerung: Mit der Newton–Cotes Quadratur

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i) \approx I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

werden Polynome vom Grad n exakt integriert, denn es gilt für den Interpolationsfehler

$$f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Dabei sind die Knoten x_i, $0 \leq i \leq n$, äquidistant auf $[a, b]$ verteilt.

Grundidee der Gauß–Quadratur: Variiere die Knoten $x_0, \ldots, x_n$.

Grundidee der Gauß–Quadratur.

Ziel:
Variiere Knoten, um Polynome möglichst hohen Grades exakt zu intergrieren.

Genauer:
Approximiere für eine feste positive Gewichtsfunktion $w : (a, b) \to (0, \infty)$ Integrale der Form

$$I[f] = \int_a^b f(x) w(x)\,dx$$

durch Quadratur der Form

$$I[f] \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) w(x_i)$$

mit einer speziellen Wahl von Stützstellen x_i und positiven Gewichten w_i.

Ergebnis: Gaußsche Quadraturformeln mit $(n+1)$ Knoten integrieren Polynome vom Grad $2n+1$ exakt.

Beispiel: Gauß–Tschebyscheff–Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
- **Knoten:** Nullstellen

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad \text{für } 0 \leq i \leq n$$

des $(n+1)$–ten Tschebyscheff–Polynoms

$$T_{n+1} = \cos((n+1)\arccos(x)) \in \mathcal{P}_{n+1} \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

- **Konstante Gewichte:** $w_i = \pi/(n+1)$.
- Gauß–Tschebyscheff–Quadratur:

$$I_n[f] = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \approx I_w[f] = \int_{-1}^{1} f(x)w(x)\,dx$$

Eigenschaften der Tschebyscheff–Polynome.

Satz: Die Tschebyscheff–Polynome $T_0, \ldots, T_n$ bilden eine orthogonale Basis des Polynomraums $\mathcal{P}_n$ bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$(f, g)_w := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx$$

Genauer gilt

$$(T_k, T_j)_w = \begin{cases} \pi & \text{für } k = j = 0 \\ \pi/2 & \text{für } k = j > 0 \\ 0 & \text{für } k \neq j \end{cases}$$

Beweis: Übung (mit Substitution $t = \cos x$)

Satz: Für die Tschebyscheff–Polynome gilt die Rekursionsforml

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k+1}(x) \qquad \text{für } k \geq 1,$$

wobei $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$.

Legrende–Polynome.

Satz: Für die Gewichtsfunktion $w = 1$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind die Legendre–Polynome

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \in \mathcal{P}_n$$

Orthogonalpolynome. Genauer gilt:

$$(L_n, L_m) = \begin{cases} 2/(2n+1) & \text{für } n = m \geq 0 \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

Beweis: Übung (per Induktion).

Satz: Für die Legendre–Polynome gilt die Rekursionsformel

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \, x \, L_n(x) - \frac{n}{n+1} \, L_{n-1}(x) \qquad \text{für } n \geq 1,$$

wobei $L_0(x) = 1$ und $L_1(x) = x$.

Die ersten Legendre–Polynome $L_n(x)$, $n \geq 2$.

Die ersten Legendre–Polynome sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\ L_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \\ L_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \end{aligned}$$

Deren jeweilige Nullstellen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} L_2 &: \quad x_{0/1} = \pm\sqrt{3} \\ L_3 &: \quad x_0 = 0, \; x_{1/2} = \pm\sqrt{3/5} \\ L_4 &: \quad x_{0/1/2/3} = \pm\sqrt{\frac{3}{7} \pm \frac{1}{7}\sqrt{\frac{24}{5}}} \end{aligned}$$

Zur Konstruktion der Gauß–Legendre–Quadratur.

- **Integrationsintervall:** $I = [-1, 1]$
- **Gewichtsfunktion:** $w(x) = 1$.
- **Knoten:** $n+1$ Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$ des Legendre–Polynoms $L_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}$.
- **Gewichte:** Mit festen Knoten $x_0, \ldots, x_n$ zu berechnen aus

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx > 0$$

- Gauß–Legendre–Quadratur:

$$I_n[f] = \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \approx I_w[f] = \int_{-1}^{1} f(x) w(x) \, dx$$

Weitere Spezialfälle der Gauß–Quadratur.

Name	Intervall	Gewicht
Gauß–Legendre	$[-1, 1]$	$w(x) = 1$
Gauß–Tschebyscheff	$[-1, 1]$	$w(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$
Gauß–Jacobi	$[-1, 1]$	$w(x) = (1 - x)(1 + x)$
Gauß–Laguerre	$[0, \infty]$	$w(x) = e^{-x}$
Gauß–Hermite	$[-\infty, \infty]$	$w(x) = e^{-x^2}$

Zur Konstruktion der Gauß–Quadraturformeln.

- Konstruiere zu festem Intervall $[a, b]$ und Gewichtsfunktion w eine Folge

$$p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}$$

von Orthogonalpolynomen, wobei $p_k \in \mathcal{P}_k$ und $(p_k, p_j)_w = \delta_{kj}$.

- Verwende Nullstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ von p_{n+1} als Knoten.
- Berechne (positive) Gewichte

$$w_i = \int_a^b \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx \qquad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

- **Ergebnis:** Gauß–Quadraturformel

$$I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \approx I_w[f] = \int_a^b f(x) w(x)\, dx$$

mit $I_n[f] = I_n[p]$ für alle $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$.

Kapitel 11. Numerische Quadratur

11.3. Numerische Berechnung der Fourier–Koeffizienten

Berechne die Fourier–Koeffizienten einer 2π–periodischen Funktion $f(t)$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$$

mittels einer numerischen Quadraturformel.

Zusammengesetzte Trapezregel (Trapezsumme): Setze

$$t_j = \frac{2\pi}{n} j \quad \text{für } 0 \leq j \leq n$$

$$h = \frac{2\pi}{n} \quad \text{(Schrittweite)}$$

$$f_j = f(t_j) \quad \text{für } 0 \leq j \leq n$$

11.3. Numerische Berechnung der Fourier–Koeffizienten

Aufgrund der Periodizität von $f(t)$ gilt $f_n = f_0$ und die Trapezsumme liefert dann

$$\begin{aligned} a_k &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \left\{ \frac{f_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \cos(kt_j) + \frac{f_n}{2} \right\} \\ &= \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \cos(kjh) =: A_k \end{aligned}$$

und analog

$$b_k \approx \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \sin(kjh) =: B_k$$

Auswertung des trigonometrischen Polynoms

$$S_m(t) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt))$$

Ende der Vorlesung.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Klausur zur Analysis II und hoffe, dass Ihnen die Vorlesung Spaß gemacht hat!