Besselsche Ungleichung und Riemannsches Lemma.

Satz: Es gilt die Besselsche Ungleichung $\|S_n\|^2 \leq \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

Folgerung: Aus der Besselschen Ungleichung folgt insbesondere die Konvergenz der beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

und damit gilt das Riemannsche Lemma

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} |b_k| = 0$$

Konvergenzgeschwindigkeit.

Satz: Ist eine T–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$) stückweise $(m+1)$–fach stetig differenzierbar, und sind die Ableitungen

$$f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(m-1)}$$

stetig auf $\mathbb{R}$, so gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\gamma_k| \leq \frac{C}{k^{m+1}} \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Fazit: Je glatter f, desto schneller konvergiert die Fourier–Reihe gegen f.

Beispiel: Bei der Rechteckschwingung $R(t)$ gilt

$$F_f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right)$$

Die Koeffizienten γ_k konvergieren mit $1/k$ gegen Null.

Die Parsevalsche Gleichung.

Bemerkung: Für $n \to \infty$ geht die Besselsche Ungleichung in Gleichheit über, d.h. es gilt die Parsevalsche Gleichung $\lim_{n\to\infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$, d.h.

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \frac{2}{T} \int\limits_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

denn die Fourier–Reihe konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$$

Beispiel: Für die Rechteckschwingung $R(t)$ gilt $\frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2 \, dt = 2$. Da $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, gilt weiterhin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2$$

Eindeutigkeitssatz.

Satz: Seien $f(t)$ und $g(t)$ zwei T–periodische stückweise stetige Funktionen mit

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) \qquad \text{für alle } t \in [0, T], \\ f(t) &= \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)) \qquad \text{für alle } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Weiterhin besitzen f und g dieselben Fourier–Koeffizienten, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt &= \int_0^T g(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, \\ \int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt &= \int_0^T g(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Dann stimmen f und g auf ganz $\mathbb{R}$ überein, d.h. es gilt $f \equiv g$.

Kapitel 11. Numerische Quadratur

Ausgangssituation: Zu berechnen sei ein bestimmtes Integral

$$I = I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$$

mit einem *numerischen* Algorithmus.

Verwenden Numerische Quadratur (Quadraturformel) der Form

$$I[f] \approx I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i)$$

mit

- Knoten: $x_i \in [a, b]$ für $i = 0, 1, \ldots, n$,
- Gewichten: g_i für $i = 0, 1, \ldots, n$.

Kapitel 11. Numerische Quadratur

11.1. Newton–Cotes Formeln

Grundidee: Verwende Interpolationspolynom p_n zu den Daten

$$(x_i, f(x_i)) \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

und integriere die Interpolante

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \qquad \text{mit } L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Ergebnis: Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} g_i f(x_i)$$

mit Gewichten

$$g_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$$

Konstruktion der Newton–Cotes Formeln.

Vereinfachung: Verwenden äquidistante Knoten

$$x_i = a + ih, \quad 0 \le i \le n, \quad \text{wobei } h = (b-a)/n$$

Ergebnis: Newton–Cotes–Quadraturformel

$$I_n[f] = \int_a^b p_n(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_{in} f(x_i)$$

mit Gewichten

$$\alpha_{in} = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x-j}{i-j}\,dx \qquad \text{für } 0 \le i \le n.$$

Die Trapezregel.

Wähle $n = 1$, $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Damit gilt

$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b}\cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a}\cdot f(b)$$

und somit bekommt man die beiden Gewichte

$$\begin{aligned} \alpha_{01} &= \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2} \\ \alpha_{11} &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Trapezregel:

$$I[f] \approx I_1[f] = (b-a)\cdot\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Die Simpsonregel.

Wähle $n = 2$ und somit

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = b.$$

Damit bekommt man die drei Gewichte

$$\begin{aligned}
\alpha_{02} &= \frac{1}{4}\int_0^2 (x-1)(x-2)\,dx = \frac{1}{6} \\
\alpha_{12} &= \frac{1}{2}\int_0^2 x(2-x)\,dx = \frac{2}{3} \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{4}\int_0^2 x(x-1)\,dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Simpsonregel

$$I[f] \approx I_2[f] = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right)$$

Zwei weitere Newton–Cotes–Formeln.

- 3/8–Regel.

$$I_3[f] = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{(b-a)}{3}\right) + f(b)\right)$$

- Milne–Regel.

$$\begin{aligned}
I_4[f] &= \frac{b-a}{90}\left(7f(a) + 32f\left(a + \frac{b-a}{4}\right) + 12f\left(a + 2\frac{b-a}{4}\right)\right. \\
&\qquad \left. + 32f\left(a + 3\frac{(b-a)}{4}\right) + 7f(b)\right)
\end{aligned}$$