$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(l\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq l \\ T/2 & : \quad k = l \neq 0 \\ T & : \quad k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(l\omega t)\,dt = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq l \\ T/2 & : \quad k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(l\omega t)\,dt = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

10.2. Fourier–Reihen

Definition:

- Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig bzw. stückweise stetig differenzierbar, falls $f(t)$ bis auf endlich viele Stellen auf $[a, b]$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist und in diesen Ausnahmepunkten die einseitigen Grenzwerte von $f(t)$ und $f'(t)$ existieren.

- Für eine stückweise stetige Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ werden die Fourier–Koeffizienten von $f(t)$ definiert durch

$$\gamma_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz.

Bemerkung: Mit den (komplexen) Fourier–Koeffizienten γ_k bekommt man die (reellen) Fourier–Koeffizienten

$$a_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt, \quad \text{für } k > 0$$

Definition: Die mit den Fourier–Koeffizienten gebildete Reihe

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)]$$

heißt die Fourier–Reihe von $f(t)$.

Bemerkung: Bei der obigen Definition verwendet man die direkte Fortsetzung der Funktion $f : [0, T] \to \mathbb{C}$ zu einer T–periodischen Funktion. Notation:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

Fourier–Reihen von geraden und ungeraden Funktionen.

Satz: Sei $f(t)$ eine stückweise stetige, T–periodische Funktion. Dann gilt:

$$f(t) \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{und} \quad b_k = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

Beweis: Beispielsweise gilt für f gerade

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = -\frac{2}{T}\int_{-T}^0 f(t)\sin(k\omega t)\,dt \\ &= -\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = -b_k \end{aligned}$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Betrachte die Sägezahnfunktion

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \text{ für } t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \text{ für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Sägezahnfunktion ist ungerade, also gilt (mit $\omega = 1$):

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(kt)\, dt = \frac{1}{k}$$

und man bekommt für die Fourier–Reihe

$$S(t) \sim \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \ldots$$

Approximation der Sägezahnfunktion durch 10. Partialsumme

$$S_{10}(t) = \sum_{k=1}^{10} \frac{\sin(kt)}{k}$$

Beispiel: Die Rechteckschwingung.

Betrachte die Rechteckschwingung

$$R(t) := \begin{cases} 0 & : \text{ für } t = 0, t = \pi, t = 2\pi \\ 1 & : \text{ für } 0 < t < \pi \\ -1 & : \text{ für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist ungerade, also gilt:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt)\, dt = \begin{cases} 0 & : \; k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & : \; k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourier–Reihe von $R(t)$ lautet daher

$$R(t) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots \right)$$

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Funktion $f(t) = t^2$, $-\pi < t < \pi$ mit 2π–periodischer Fortsetzung.

Die Funktion ist gerade, damit folgt

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t^2 \cos(kt)\,dt = \begin{cases} \dfrac{2\pi^2}{3} & : \quad k = 0 \\ (-1)^k \dfrac{4}{k^2} & : \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

Damit bekommt man die Fourier–Reihe

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} - \frac{4\cos t}{1^2} + \frac{4\cos(2t)}{2^2} - + \ldots$$

Rechenregeln für Fourier–Reihen.

Für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}, \qquad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- Linearität:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha\gamma_k + \beta\delta_k) e^{ik\omega t}$$

- Konjugation:

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{-k} e^{ik\omega t}$$

- Zeitumkehr:

$$f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{ik\omega t}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier–Reihen.

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- Streckung:

$$f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik(c\omega)t} \quad \text{für } c > 0$$

- Verschiebung:

$$f(t+a) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_k e^{ik\omega a}\right) e^{ik\omega t} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

$$e^{in\omega t} f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{ik\omega t} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Weitere Rechenregeln für Fourier–Reihen.

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodisch mit

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega t}$$

gelten die folgenden Rechenregeln.

- Ableitung: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar, so gilt

$$f'(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega\gamma_k) e^{ik\omega t} = \sum_{k=1}^{\infty} \omega k \Big(b_k \cos(k\omega t) - a_k \sin(k\omega t) \Big)$$

- Integration: Gilt $a_0 = \gamma_0 = \int_0^T f(t)dt = 0$, so folgt

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \sim -\frac{1}{T} \int_0^T tf(t)\, dt - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) - \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) \right)$$

Konvergenzsatz.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T–periodisch, stückweise stetig differenzierbar. Dann gelten die folgenden Konvergenzaussagen für die zugehörige Fourier–Reihe

$$F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \Big) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

- Die Fourier–Reihe konvergiert punktweise und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_f(t) = \frac{1}{2} \left(f(t^+) + f(t^-) \right)$$

- In allen kompakten Intervallen $[a, b]$, in denen $f(t)$ stetig ist, ist die Konvergenz gleichmäßig.

Bemerkung: Die Stetigkeit von $f(t)$ reicht für die Konvergenz der Fourier–Reihe nicht aus.

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Es gilt:

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{für } t = 0, t = 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : \quad \text{für } 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

Fehlerfunktion: Definiere für $0 < t < 2\pi$

$$R_n(t) := \frac{1}{2}(t - \pi) + \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} + \cdots + \frac{\sin(nt)}{n}$$

Weiterhin gilt:

$$1 + 2\cos t + \cdots + 2\cos(nt) = \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)}$$

Integration:

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})t\right]}{\sin(t/2)} \, dt = (t - \pi) + 2\sin t + 2\frac{\sin(2t)}{2} + \cdots + 2\frac{\sin(nt)}{n}$$

Beispiel: Die Sägezahnfunktion.

Daraus folgt:

$$R_n(t) = \int_\pi^t \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{2\sin(t/2)}\,dt$$

$$\stackrel{\text{p.I.}}{=} \frac{-\cos\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{1}{2n+1}\int_\pi^t \cos\left((n+\frac{1}{2})\tau\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sin(\tau/2)}\right)d\tau$$

$$\stackrel{\text{MWS}}{=} \frac{-\cos\left[(n+\frac{1}{2})t\right]}{(2n+1)\sin(t/2)} + \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\bar{t}\right]}{(2n+1)}\left(\frac{1}{\sin(t/2)} - 1\right)$$

und daher

$$|R_n(t)| \leq \frac{2}{(2n+1)\sin(t/2)}$$

Ist $t \in (0, 2\pi)$ fest, so gilt:

$$|R_n(t)| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

Approximationsgüte im quadratischen Mittel.

Satz: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T–periodische, stückweise stetige Funktion, und seien

$$S_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\Big)$$

die Partialsummen der zugehörigen Fourier–Reihen von f. Für den linearen Raum

$$T_n := \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega t), \ldots, \cos(n\omega t), \sin(\omega t), \ldots, \sin(n\omega t)\right\}$$

der trigonometrischen Polynome mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T \overline{u(t)}v(t)\,dt$$

gilt

$$\|f - S_n\| \leq \|f - \varphi\| \qquad \text{für alle } \varphi \in T_n,$$

d.h. $S_n(t)$ ist die Bestapproximation an f aus T_n bezüglich $\|\cdot\|$.