Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Jens Struckmeier

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg
Sommersemester 2011

Inhalte der Vorlesung Analysis II.

1. Gleichmäßige Konvergenz.
2. Potenzreihen.
3. Elementare Funktionen.
4. Interpolation.
5. Integration.
6. Kurven und Kurvenintegrale.
7. Numerische Quadratur.
8. Extrapolation.
9. Periodische Funktionen, Fourier–Reihen.
10. Schnelle Fourier–Transformation (FFT).

6.1. Gleichmäßige Konvergenz

Definition: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ ür $D \subset \mathbb{C}^m$, eine Funktionenfolge. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

- punktweise gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in D.$$

- gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Bemerkung: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Beispiel: Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger Funktionen definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & : \quad 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & : \quad \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert punktweise gegen die unstetige Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Allerdings konvergiert $(f_n)_n$ nicht gleichmäßig gegen f, denn es gilt

$$\|f_n - f\|_\infty = 1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wichtiges Resultat zur gleichmäßigen Konvergenz.

Satz: Falls eine Folge $(f_n)_n$ stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$ gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist f stetig auf D.

Beweis: Zeige die Stetigkeit von f in $z_0 \in D$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben und n hinreichend groß, sodass

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wähle $\delta > 0$ hinreichend klein, sodass

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für alle } \|z - z_0\| < \delta$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0| &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{für alle } z \in D \text{ mit } \|z - z_0\| < \delta. \end{aligned}$$

Das Majorantenkriterium von Weierstraß.

Satz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}^m$, und es gelte

$$|f_n(z)| \leq b_n \text{ für alle } z \in D \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$$

für eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann ist die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{für } z \in D,$$

gleichmäßig und absolut konvergent auf D.

Folgerung: Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen, sodass

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{für } z \in D,$$

auf D gleichmäßig konvergiert. Dann ist f stetig in D.

Beweis: Punktweise und absolute Konvergenz folgen aus dem Majorantenkriterium für Reihen. Die gleichmäßige Konvergenz folgt mit

$$\left|\sum_{n=0}^{m} f_n(z) - f(z)\right| \leq \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n < \varepsilon$$

und dem Cauchy–Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.

Satz: Sei $(f_n)_n$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_:(a,b) \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{für } x \in (a,b),$$

auf (a,b) gleichmäßig konvergent sind. Dann ist die Funktion f differenzierbar auf (a,b), und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z) \qquad \text{für alle } x \in [a,b].$$

6.2. Potenzreihen

Definition: Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

heißt (komplexe) Potenzreihe zum Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$.

Beispiel: Die (komplexe) Exponentialfunktion ist definiert durch die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Weiterhin: Elementare Funktionen sind über Potenzreihen definiert:

$$\ln(z), \cos(z), \sin(z), \ldots$$

Beispiel: Taylor–Reihenentwicklung.

Betrachte für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty$, die Taylor–Reihe

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad \text{mit } x_0, x \in \mathbb{R}$$

Bemerkungen.

- Die Taylor–Reihe einer $\mathcal{C}^\infty$–Funktion ist im Allgemeinen nicht konvergent.
- Konvergiert die Taylor–Reihe $T(x)$, so nicht notwendigerweise gegen $f(x)$.
- Falls
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$
so nennt man die Funktion f reell analytisch.

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Satz: Zu jeder Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

gibt es eine Zahl $r \geq 0$ mit den Eigenschaften

$$|z - z_0| < r \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{absolut konvergent}$$

$$|z - z_0| > r \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{divergent}$$

Die Zahl $r \geq 0$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Die Potenzreihe konvergiert für alle ρ mit $0 \leq \rho < r$ auf

$$\overline{K_\rho(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\}$$

sogar gleichmäßig.

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Beweis: Wir definieren

$$r := \sup\left\{ |w| \quad \Big| \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k \ \text{konvergent} \right\}$$

- Dann gilt $0 \leq r \leq \infty$ und für $|z - z_0| > r$ ist die Potenzreihe divergent.
- Gilt $r = 0$, so ist die Potenzreihe nur für $z = z_0$ (absolut) konvergent.
- Sei nun $r > 0$ und $0 < \rho < r$. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \rho$, sodass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

konvergiert. Insbesondere ist die Folge $(a_k w^k)_{k \geq 0}$ beschränkt, d.h. es gibt eine Schranke $M > 0$ mit

$$|a_k w^k| \leq M \qquad \text{für alle } k \geq 0$$

Konvergenzradius einer Potenzreihe.

Beweis: (Fortsetzung) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho < |w|$ gilt somit

$$|a_k (z - z_0)^k| = |a_k w^k| \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq M \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

und weiterhin

$$\left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k \leq \left| \frac{z - z_0}{w} \right| < 1 \qquad \text{für alle } k \geq 1,$$

sodass die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{w} \right|^k$$

konvergiert. Mit dem Majorantenkriterium von Weierstraß konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

absolut und gleichmäßig für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \leq \rho$.

Die Formel von Cauchy–Hadamard.

Satz: Den Konvergenzradius $r \geq 0$ einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{mit } a_k, z_0, z \in \mathbb{C}$$

kann man mit der Formel von Cauchy–Hadamard berechnen:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad \text{(siehe 3.3 aus Analysis I)}$$

Beweis: Verwende hierzu das Wurzelkriterium

$$\forall\, k \geq k_0 \quad : \quad \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} \leq q < 1 \Leftrightarrow \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k (z - z_0)^k|} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}\, |z - z_0| < 1 \Leftrightarrow |z - z_0| < \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Konvergenz von Potenzreihen.

Satz: Für eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ gelten folgende Aussagen.

a) Falls einer der beiden Grenzwerte

$$r = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}, \qquad \text{oder} \qquad r = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

existiert (oder falls $r = \infty$), so stimmt dieser Grenzwert mit dem Konvergenzradius der Potenzreihe überein.

b) Differenziert man die Potenzreihe, so erhält man wiederum eine Potenzreihe,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1},$$

deren Konvergenzradius mit dem Konvergenzradius r der Ausgangsreihe übereinstimmt, auch im Fall $r = 0$ oder $r = \infty$.

Beweis des letzten Satzes.

Beweis: Der erste Teil von a) folgt aus der Formel von Cauchy–Hadamard. Verwende für den zweiten Teil von a) das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_0|\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_0| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$

Zu Teil b): Berechne den Konvergenzradius mit Cauchy–Hadamard, womit

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{k|a_k|} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$$

wegen $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$. Somit sind die Konvergenzradien der beiden Potenzreihen identisch.

Beispiele.

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ konvergiert nur für $z = 0$, denn $k!z^k$ ist für $z \neq 0$ keine Nullfolge. Der Konvergenzradius ist in diesem Fall $r = 0$.
- Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ hat den Konvergenzradius $r = 1$.
- Die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ hat den Konvergenzradius $r = \infty$.
- Aus der Differentiation der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ergibt sich:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots \quad \text{für } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{1}{2}\left(2 + 6z + 12z^2 + \ldots\right)$$

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus.

- **Beachte:** Die integrierte Potenzreihe

$$C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}$$

besitzt den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

- **Anwendung:** Die Integration der Potenzreihe

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

liefert eine Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \quad \text{für } -1 < x < 1$$

Potenzreihenentwicklung von arctan.

- **Weitere Anwendung:** Integration der Potenzreihe

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{für } -1 < x < 1$$

liefert die Potenzreihenentwicklung

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \quad \text{für } -1 < x < 1$$

Bemerkungen:

- Eine Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzkreises $K_r(z_0)$ stetig.
- Reelle Potenzreihen sind $\mathcal{C}^\infty$–Funktionen auf $(x_0 - r, x_0 + r)$.
- Eine reelle Potenzreihe stimmt mit einer Taylor–Reihe überein:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \text{für } |x-x_0| < r$$

Identitätssatz und Abelscher Grenzwertsatz.

- Identitätssatz für Potenzreihen: Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$$

reelle Potenzreihen, die in einem Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ die gleiche Funktion darstellen, so gilt:

$$a_k = b_k \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

- Abelscher Grenzwertsatz: Reelle Potenzreihen der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

sind überall dort stetig, wo sie konvergieren, d.h. insbesondere in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Beispiel zum Abelschen Grenzwertsatz.

Beispiel: Die Reihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}, \qquad -1 < x < 1$$

konvergiert auch für $x = +1$. Somit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz insbesondere die Gleichung

$$\ln(1+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1}$$

gültig. Daraus folgt die Darstellung

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gilt:

a)

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k \quad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2)$$

b)

$$\lambda f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda a_k z^k \quad \text{für } |z| < r_1$$

c) Cauchy–Produkt für Potenzreihen

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) z^k \quad \text{für } |z| < \min(r_1, r_2)$$

Weitere Rechenregeln für Potenzreihen.

Satz: Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ Potenzreihen.

d) Ist $f(0) = 0$, so läßt sich die Potenzreihe $f(z)$ in die Potenzreihe $g(z)$ einsetzen, d.h. es gibt ein $r_3 > 0$ und eindeutige Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{für } |z| < r_3$$

e) Ist $f(0) \neq 0$, so besitzt die Funktion $1/f(z)$ eine Potenzreihenentwicklung, d.h. es gibt ein $r_4 > 0$ und eindeutige Koeffizienten $d_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \quad \text{für } |z| < r_4,$$

die sich nach dem Cauchy–Produkt in c) wie folgt rekursiv berechnen.

$$a_0 d_0 = 1, \qquad a_0 d_k = -\sum_{l=0}^{k-1} d_l a_{k-l}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 1. Wir definieren den cosinus hyperbolicus für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

und ersetzen e^x durch die Potenzreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}x^{2k} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Analog erhält man für $x \in \mathbb{R}$ den sinus hyperbolicus durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 2. Für

$$f(x) = \frac{\cos x}{1-x}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1-x} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^l\right)\\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots\right) \cdot \left(1 + x + x^2 + \ldots\right)\\ &= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right)x^3\\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right)x^4 + \ldots \quad \text{für } -1 < x < 1\end{aligned}$$

Beispiele zu den Rechenregeln für Potenzreihen.

Beispiel 3. Wir setzen

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Dabei lautet die Potenzreihe des Nenners

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Zur Potenzreihenentwicklung von $g(x)$ verwenden wir den Ansatz

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

und damit gilt

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \cdot g(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right)$$

Fortsetzung von Beispiel 3.

$$1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} \right) x^k$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(k-l+1)!} = \begin{cases} 1 & : \quad k = 0 \\ 0 & : \quad k > 0 \end{cases}$$

Damit bekommt man

$$B_0 = 1, \qquad B_k = -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!(k-l+1)!} B_l \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

Die Zahlen B_k nennt man Bernoullische Zahlen:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$