Aufgabe 1) Gegeben sei $f(x) = \dfrac{2x^2 + 10x - 2}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 9)}$.

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Lösungsskizze Reelle Nennernullstellen: p-q-Formel, quadr. Ergänzug oder Vieta liefern

$$x_1 = 1\,, \qquad x_2 = 2\,. \qquad \text{[1 Punkt]}$$

Ansatz für die Funktion:

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx+d}{x^2+9} \qquad \text{[1 Punkt]}$$

Zu erfüllen ist:

$$a(x-1)(x^2+9) + b(x-2)(x^2+9) + (cx+d)(x-1)(x-2) = 2x^2 + 10x - 2$$

Einsetzen ergibt:

$$x = 2: \quad a \cdot 1 \cdot 13 \;=\; 8 + 20 - 2 \iff a = 2\,,$$

$$x = 1: \quad b \cdot (-1) \cdot 10 \;=\; 2 + 10 - 2 \iff b = -1\,,$$

$$x = 0: \quad a \cdot (-9) + b \cdot (-18) + d \cdot 2 \;=\; -2 \iff d = -1\,,$$

Koeffizientenvergleich für die höchste Potenz (x^3) ergibt

$$x^3: \quad a + b + c = 0 \iff c = -1\,. \qquad \text{[Koeffizienten: 2 Punkte]}$$

$$\int f(x) = \int \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+9}\,dx$$

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1}{x^2+9}\,dx\,. \qquad \text{[2 Punkte]}$$

Man Substitutiert $u = x^2 + 9,\ du = 2x \cdot dx$ [1 Punkt]

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du - \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\,.$$

Hier Substitutiert man $y = \frac{x}{3},\ dx = 3dy$ [1 Punkt]

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln|u| - \tfrac{3}{9}\int \frac{1}{1+y^2}\,.$$

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+9) - \tfrac{1}{3}\arctan\left(\tfrac{x}{3}\right) + C \quad \text{[2 Punkte]}$$

Aufgabe 2) Zur Nullstellenbestimmung der gegebenen Funktion $f(x)$, $x > 0$ mit

$$f(x) = \ln(6x) + 2x^2,$$

soll ein Fixpunktverfahren herangezogen werden.

a) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle x^* besitzt.

b) Leiten Sie aus der Gleichung $f(x) = 0$ die Fixpunkt-Iteration

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = \frac{1}{6}\exp(-2x_k^2), \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

her und zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 \geq 0$ der erste Iterationsschritt eine Zahl $x_1 \in [0, \frac{1}{6}] =: I$ liefert.

c) Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für die obige Funktion $\phi(x) := \frac{1}{6}\exp(-2x^2)$ auf dem Intervall I.

d) Führen Sie für den Startwert $x_0 = 0$ eine A-priori-Fehlerabschätzung durch und berechnen Sie eine Iterationszahl n, so dass sicher $|x_n - x^*| \leq 0.01$ gilt.

Lösungsskizze:

a) [3 Punkte]
Es gilt

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Zwischenwertsatz $\Longrightarrow$ f hat mindestens eine Nullstelle.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 4x \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 + 4x^2 \overset{!}{=} 0 \quad \text{(wird von keinem } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllt)}$$

Satz von Rolle $\Longrightarrow$ f hat höchstens eine Nullstelle.
Wegen $f(\frac{1}{6}) = \frac{1}{18} > 0$ erwarten wir die Nullstelle im Intervall $(0, \frac{1}{6})$.

b) [2 Punkte]
Es gilt

$$\ln(6x) + 2x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{6}\exp(-2x^2) =: \Phi(x)$$

Für jeden Startwert $x_0 \geq 0$ gilt
$0 \leq x_1 = \phi(x_0) = \frac{1}{6}\exp(-2x_0^2) \leq \frac{1}{6}$,

c) [3 Punkte]
Überprüfung der Selbstabbildungseigenschaft auf $I = [\,0, \frac{1}{6}]$:
Nach Teil b) gilt für $x_k \in \mathbb{R}^+$ stets $\phi(x_k) \in I$. Insbesondere also auch $\phi : I \to I$.

Überprüfung der Kontraktionsseigenschaft:

$$\Phi'(x) = -\frac{2}{3} x \exp(-2x^2)$$

Es gilt $|\Phi'(x)| \leq \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{6} = \frac{1}{9} =: L$ für alle $x \in I$.
Die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt. Die Iterationsfolge (x_k) konvergiert daher gegen x^* .

d) [2 Punkte]
Es gilt

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| = \frac{9}{8} \left(\frac{1}{9}\right)^n \left|\frac{1}{6} - 0\right| = \frac{9}{48} \left(\frac{1}{9}\right)^n .$$

Für $n \geq 2$ erhalten wir also

$$|x_2 - x^*| \leq \frac{9}{48} \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{48 \cdot 9} < 0.01.$$