Fachbereich Mathematik **SoSe 2010**
Prof. Dr. H. J. Oberle

Klausur Mathematik II

(Modul: Analysis II)

19. August 2010

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:

BU	LUM	MB	MTB	SB	BVT	EUT	VT	sonstige

Wertung :

zusammen mit Lineare Algebra II		Einzelwertung	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die **2** angegebenen Aufgaben. Pro Aufgabe werden 10 Punkte vergeben.

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		

$\sum =$

Aufgabe 1)

a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung des Funktionsgraphen von

$$f\,:\,[0,\pi]\to\mathbb{R},\;f(x)=\sqrt{\sin(x)}\,\cos^2(x)$$

um die x-Achse entsteht.

b) Gegeben seien die Kurve

$$c:[0,\,\ln(2)]\to\mathbb{R}^2,\qquad c:t\longmapsto e^t\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix},$$

und die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln(x^2+y^2)\right).$$

(i) Berechnen Sie die Länge der Kurve c.

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs c.

Lösungsskizze

a) Mit der Substitution $u=\cos(t),\,du=-\sin(t)dt$ [1 Punkt]
und den neuen Intergrationsgrenzen
$a=\cos(0)=1,\,b=\cos(\pi)=-1$ [1 Punkt]
erhält man

$$V=\pi\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx=\pi\int_0^{\pi}\sin(x)\,\cos^4(x)dx=\pi\int_1^{-1}-u^4\,du=\frac{2\pi}{5}.$$ [1 Punkt]

b) $\dot c(t)=\begin{pmatrix}(\cos t+\sin t)e^t\\ (\cos t-\sin t)e^t\end{pmatrix}$ [1 Punkt]

$$\begin{aligned}\|\dot c(t)\|^2 &= (\cos^2(t)+2\cos(t)\sin(t)+\sin^2(t))e^{2t}+(\cos^2(t)-2\cos(t)\sin(t)+\sin^2(t))e^{2t}\\ &= 2(\cos^2 t+\sin^2 t)e^{2t}=2e^{2t}\end{aligned}$$ [2 Punkte]

(i) $L(c)=\int_0^{\ln(2)}\|\dot c(t)\|dt=\int_0^{\ln(2)}\sqrt{2}e^tdt=\sqrt{2}(e^{\ln(2)}-e^0)=\sqrt{2}.$ [1 Punkt]

(ii) $f(c(t))=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left((\sin^2 t+\cos^2 t)e^{2t}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(e^{2t}\right)=\sqrt{2}\,t$ [1 Punkt]

$$\begin{aligned}\int_c f(x,y)ds &= \int_0^{\ln(2)}\sqrt{2}\,t\cdot\sqrt{2}e^t\,dt=2te^t\Big|_0^{\ln(2)}-\int_0^{\ln(2)}2e^t\\ &= 2\ln(2)e^{\ln(2)}-2e^t\Big|_0^{\ln(2)}=4\ln(2)-2(e^{\ln(2)}-e^0)=4\ln(2)-2.\end{aligned}$$ [2 Punkte]

Aufgabe 2)
a) Gegeben sind folgende Daten der Funktion $f(x) = x\cos(2x)$.

x_k	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x_k)$	0	$\frac{\pi}{12}$	0

i) Berechnen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p_2 zweiten Grades zu den obigen Interpolationsdaten.

ii) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion f, und zeigen Sie, dass folgende Abschätzung für den Interpolationsfehler im Punkt $x = \frac{\pi}{12}$ gilt:

$$\left|p_2\left(\frac{\pi}{12}\right) - f(\frac{\pi}{12})\right| < \frac{1}{3}.$$

b) Berechnen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x) = \dfrac{e^{2x} - x - 1}{x}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösungsskizze:

a)

$$\begin{array}{c|cccc}
x_k & y_k & & & \\
\hline
0 & 0 & & & \\
 & & \frac{\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} & & \\
\frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{12} & & \frac{-1-\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{-6}{\pi} & \\
 & & \frac{0-\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{12}} = -1 & & \\
\frac{\pi}{4} & 0 & & &
\end{array}$$

$$p_2(x) := \frac{1}{2}x - \frac{6}{\pi}x(x - \frac{\pi}{6}) \quad [3 Punkte]$$

$f'(x) = \cos(2x) - 2x\sin(2x)$, $\quad f''(x) = -4\sin(2x) - 4x\cos(2x)$
$f'''(x) = -12\cos(2x) + 8x\sin(2x)$. [2 Punkte]

$$\left|p_2\left(\frac{\pi}{12}\right) - f(\frac{\pi}{12})\right| = \left|\frac{f'''(\theta)}{3!}\left(\frac{\pi}{12} - 0\right)\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right)\right| \quad [1 Punkt]$$

$$= \left|\frac{-12\cos(2\theta) + 8\theta\sin(2\theta)}{6}\right| \cdot \frac{\pi^3}{12\cdot 6\cdot 12} \le \frac{(12 + 8(\frac{\pi}{4}))}{6} \cdot \frac{2}{3\cdot 3\cdot 3} \quad [1 Punkt]$$

$$< \frac{(12 + 2\pi))}{81} < \frac{20}{81} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}. \quad [1 Punkt]$$

b)
$$f(x) = \frac{e^{2x} - x - 1}{x} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} - x - 1}{x} = \frac{1 + 2x + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} - 1 - x}{x}$$
$$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k x^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1} x^k}{(k+1)!}. \quad [2 Punkte]$$