

## Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 2

#### Aufgabe 5:

a) Gegeben seien die folgenden Funktionenreihen

$$(i) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^3 - 1)(2 - x^3)^k, \quad (ii) \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3(x^{2k} + 1)}.$$

Man bestimme den maximalen Konvergenzbereich  $D$  und untersuche die Reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz in  $D$ .

b) Man zeige, dass für  $x \in ]0, \infty[$

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{2}{(x+k)(x+k+2)}$$

gleichmäßig gegen  $h(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)}$  konvergiert.

#### Aufgabe 6: (aus dem Vordiplom Analysis II, SS00+SS05)

a) Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left( \frac{2}{5} \right)^2 x \right)^{2n}, \quad (ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4} x^n.$$

b) Man bestimme den Konvergenzradius und das Konvergenzintervall der folgenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{5^n(n+2)\sqrt{n+3}}$$

und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls (mit Begründung).

**Aufgabe 7:**

Gegeben sei die durch  $f(x) = \frac{2}{3x+4}$  definierte Funktion.

- a) Man zeichne die Funktion  $f$ .
- b) Man beweise über vollständige Induktion, dass für  $k \geq 0$  gilt

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k 2 \cdot 3^k \cdot k!}{(3x+4)^{k+1}}.$$

- c) Man berechne die Taylorreihe von  $f$  allgemein zum Entwicklungspunkt  $x_0 \neq -4/3$  und bestimme den Konvergenzradius.
- d) Welche Konvergenzintervalle ergeben sich für  $x_0 = \pm 1$ ? Liegt Konvergenz in den Randpunkten vor?

**Aufgabe 8:**

Gegeben sei die durch  $f(x) = \frac{2}{3x+4}$  definierte Funktion.

- a) Unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

berechne man die Potenzreihe für  $f$  zum Entwicklungspunkt  $z_0 = 1+i$  und bestimme deren Konvergenzradius.

- b) Man bestimme die Glieder der Potenzreihenentwicklung von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  über die Rekursionsformel aus dem Cauchy-Produkt von Reihen, sowie den zugehörigen Konvergenzradius.
- c) Konvergiert die Potenzreihe aus b) in den Randpunkten des Konvergenzintervalls?

**Abgabetermin:** 27.4. - 30.4. (zu Beginn der Übung)