Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

23. Juni 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

Definition 3.11: Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \ , \quad x, x_0 \in \mathbb{R}, a_k \in \mathbb{R}$$

mit den Polynomen $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ als Partialsummen heißt Potenzreihe. x_0 heißt Entwicklungspunkt der Potenzreihe, die Zahlen a_k heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

Beachte: Diese Definition ist auch für komplexe Zahlen $x, x_0 \in \mathbb{C}, a_k \in \mathbb{C}$ sinnvoll. In diesem Fall heißt die Potenzreihe komplex.

Satz 3.22: (Identitätssatz)
Es seien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

und

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

zwei Potenzreihen, die beide in einem offenen Intervall I um x_0 konvergieren. Stimmen dann f und g auf einer Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ $(x_0 \neq x_n)$ überein, d.h. $f(x_k) = g(x_k)$ für $k = 1{,}2{,}3, \ldots$, so sind beide Potenzreihen identisch, d.h. es gilt

$$f(x) = g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I, \ \text{und} \quad a_k = b_k \quad \text{für } k = 0{,}1, \ldots .$$

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

Satz 3.23: (Satz von CAUCHY **und** HADAMARD**)**
Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit den Koeffizienten a_k und dem Entwicklungspunkt x_0 gibt es ein Konvergenzintervall $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ mit folgenden Eigenschaften:

a) **Die Potenzreihe konvergiert für $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ punktweise. Sie konvergiert außerdem gleichmäßig absolut in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.**
b) **Außerhalb von $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ divergiert die Potenzreihe.**

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

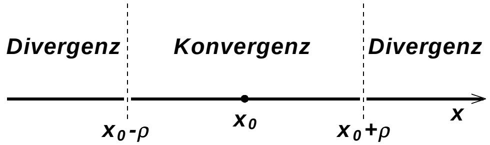

Abbildung 3.10: Konvergenzradius reeller Potenzreihen

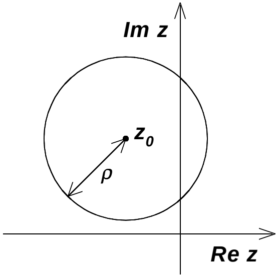

Abbildung 3.11: Konvergenzkreis in der GAUSS**schen Zahlenebene**

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

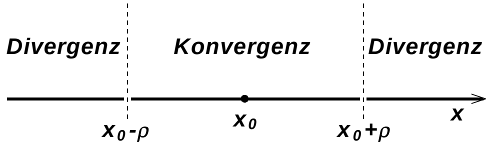

Abbildung 3.10: Konvergenzradius reeller Potenzreihen

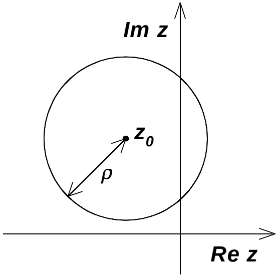

Abbildung 3.11: Konvergenzkreis in der GAUSS**schen Zahlenebene**

Buch Kap. 3.4 – Potenzreihen

Satz 3.24: (Konvergenzradius)
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c > 0, \quad \text{oder} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c > 0,$$

so ist

$$\rho = \frac{1}{c} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

der Konvergenzradius der Reihe.

Buch Kap. 3.5 – Operationen mit Potenzreihen

Satz 3.25: (Konvergenz von Summe und Produkt)
Für Summe und Produkt zweier Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ gilt im gemeinsamen Konvergenzbereich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-x_0)^k$$

bzw.

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k)\cdot(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$$

mit $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0$ (Cauchy Produkt).

Buch Kap. 3.5 – Operationen mit Potenzreihen

Satz 3.26: (gliedweises Differenzieren und Integrieren) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$ und der Summe $f(x)$.

a) **Die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist auf dem Konvergenzintervall $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen erhält man durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe: z.B. ist**

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} .$$

b) **$f(x)$ ist weiter über jedes abgeschlossene Teilintervall $[a, b]$ des Konvergenzintervalls integrierbar (da stetig). Das Integral darf durch gliedweise Integration der Potenzreihe gebildet werden:**

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left[(b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1} \right] .$$

Definition 3.12: (Exponentialfunktion)
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

heißt Exponentialfunktion.

Buch Kap. 3.6 – Potenzreihe von $\exp x$

Satz 3.27: (Additionstheorem)

Für die gemäß

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

erklärte Exponentialfunktion gilt das Additionstheorem

$$(\exp x)(\exp y) = \exp(x + y).$$

Buch Kap. 3.6 – Potenzreihen von **sin *x***, **cos *x***

Definition 3.15: (Sinus und Kosinus)
Die durch die auf ganz $\mathbb{R}$ konvergenten Reihen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

erklärten Funktionen heißen Sinus- und Kosinus-Funktion.

Beachte:

$$\cos x = \mathrm{Re}\, exp(ix), \qquad \sin x = \mathrm{Im}\, exp(ix).$$