Potenzreihen

$\hat{=}$ spezielle Funktionenreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$ heißt Potenzreihe

Dabei sind $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$\text{Potenzreihe} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$ mit

$$f_k(x) = a_k (x-x_0)^k$$

Warum sind Potenzreihen "interessant"?

z.B. Taylorformel f $(n+1)$-mal stetig diffbar. Dann

Einfaches Modell für f

$$f(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k} + R_{n+1}(x_0).$$

230608 ②

Dabei: $$R_{n+1}(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Restglied.

Taylorreihe von f:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

ist Potenzreihe mit $a_k := \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Frage: Wann bzw wo (d.h. für welche x) konvergiert die Taylorreihe?

Allgemein: Wo konvergieren Potenzreihen?

Dazu bemerke: x fix, dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$ reelle Zahlenreihe

Konvergenzprüfung:
i.) Quotientenkriterium
ii) Wurzelkriterium

Wurzelkriterium für $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k$:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\tilde{a}_k|} = C \begin{cases} < 1 & \text{Konvergenz} \\ > 1 & \text{Divergenz} \end{cases}$$

Setze $\tilde{a}_k := a_k (x-x_0)^k$

Dann Forderung für Konvergenz der Potenzreihe

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\tilde{a}_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| \, |x-x_0|^k}$$

$$= |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \stackrel{!}{=} C < 1$$

Forderung: $|x-x_0| < \dfrac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\tilde{a}_{k+1}}{\tilde{a}_k} \right| = C \begin{cases} < 1 & \text{Konvergenz} \\ > 1 & \text{Divergenz} \end{cases}$$

230608 (4)

Hier

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\tilde{a}_{k+1}|}{|\tilde{a}_k|} = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \overset{!}{=} q < 1$$

Forderung: $|x-x_0| < \lim \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$

<u>Bsp</u>: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k} \overset{u=x^2}{=} \sqrt{u} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} u^k}_{\text{Potenzreihe}}$$

Konvergenz, falls

$$|u| < \lim_{k\to\infty} \frac{3^k \, (k+2)}{(k+1)\, 3^{k+1}} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$u = x^2$

Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}$ für

$|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Satz von Cauchy-Hadamard

Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

besitzt ein Konvergenzintervall

$(x_0-\rho, x_0+\rho)$

s.d.

i.) absolute Konvergenz in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ vorliegt

ii.) Divergenz in $(-\infty, x_0-\rho) \cup (x_0+\rho, \infty)$.

iii.) über die Stellen $x_0-\rho$, $x_0+\rho$ sind Aussagen herzuleiten.

Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \rho$

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \rho$

Konvergenz-Radius.

23.06.08 ⑥

Identitätssatz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad , \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k$$

stimmen überein auf der Folge (x_k)

mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ und $x_k \neq x_0 \ \forall_k$,

d.h. $\quad f(x_j) = g(x_j) \quad \forall_{j\in\mathbb{N}}$

Dann gilt schon

$$a_k = b_k \quad \forall_{k\in\mathbb{N}} ,$$

d.h. f und g stimmen überein.

Nachweis: Induktion

Es gilt $\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = a_0 = \lim_{x\to x_0} g(x) = b_0$

Ind. Vor. $\quad a_k = b_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$

230608 ⑦

zuzg: $a_{n+1} = b_{n+1}$

Dazu betrachte

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$g_1(x) = \frac{g(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}}$$

geändert

Damit wegen $a_k = b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

und $x_j \neq x_0$ $\forall j$:

$$f_1(x_j) = g_1(x_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Wegen $f_1(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \cancel{a_{n+1}}\, a_k (x-x_0)^{k-n}$

$$g_1(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k (x-x_0)^{k-n}$$

und

$$a_{n+1} = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_1(x) = b_{n+1}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Besitzt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ den 230608 (8)

Konvergenzkreis (Konvergenzintervall) ~~Kreis~~ $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, so konvergiert die Potenzreihe gleichmässig in jedem abg. Intervall $[a,b] \subset (x_0-\varrho, x_0+\varrho)$

Nachweis: Mit Majorantenkriterium für Funktionenreihen. $\rightarrow$ Übung

Was passiert bei $|x-x_0| = \varrho$?

Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} x^k$, $\varrho = \frac{1}{5} \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{5}$

$x_0 = 0$;

$x = \frac{1}{5}$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty$

$x = -\frac{1}{5}$: $\sum \frac{5^k}{k+1} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \sum (-1)^k \frac{1}{k+1}$ konvergent (Leibniz)

Konvergenz bei $x_0 - g = -\frac{1}{5}$,

Divergenz bei $x_0 + g = \frac{1}{5}$

Abel Grenzwertsatz

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ konvergent in (x_0-g, x_0+g)

und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (-g)^k$ konvergent, so

gilt $\lim_{\substack{x \to x_0-g \\ x > x_0-g}} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-g)^k$

Analog bei $x = x_0 + g$.

Differentiation von Potenzreihen

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ in (x_0-g, x_0+g)

$\rightarrow$ $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ gliedweise Differenzieren

Konvergenzkreis von $f'(x)$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k\,|a_k|}{(k+1)\,|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$$

$$= 1 \cdot \rho = \rho$$

Konvergenzkreise von f, f' stimmen überein.

Integration

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

$$\int f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + C$$

Konvergenzkreise von $f, \int f$ stimmen überein.

Bsp: i.) $f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

$|x| < 1$

Damit

$$C_1 + \ln|1+x| = \int f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

$$\ln(1+0) = 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

ii) $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C_1$$

mit $C_1 = 0$

<u>Exponentialfunktion</u>

$$e^x := \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k}_{\text{Potenzreihe mit}}$$

$$S = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} k+1 = \infty$$

Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$

Additionstheorem

$$e^x e^y = e^{(x+y)},$$

denn

$$e^x e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k$$

$$\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j \frac{1}{(k-j)!} y^{k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} x^j y^{k-j}}_{=(x+y)^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = e^{(x+y)}$$

$$\Rightarrow \quad e^x e^y = e^{(x+y)}$$

230608

13

Beachte: Potenzreihen analog für

$a_k \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$

mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - x_0)^k$$

behandelbar.

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

mit $z = (x + iy) \in \mathbb{C}$