Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

16. Juni 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Definition 3.4: (Funktionenfolge) Die unendliche Folge

$$f_1, \; f_2, \; f_3, \; \ldots, \; f_n, \; \ldots$$

der Funktionen $f_k : D \longrightarrow \mathbb{R}, \; k = 0,1,2, \ldots$, nennen wir Funktionenfolge auf D und schreiben dafür wie im Falle von Zahlenfolgen auch kurz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (f_n).

Definition 3.5: (punktweise Konvergenz) Eine Funktionenfolge (f_n) auf D heißt punktweise konvergent, falls für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))$ konvergiert.

Anstelle von punktweiser Konvergenz sprechen wir auch abkürzend von Konvergenz.

Die Grenzfunktion f ist dabei für jedes $x \in D$ durch

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$$

erklärt.

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Definition 3.6: (Abstand und Supremumsnorm) Sind f und g beschränkte Funktionen auf D, so bezeichnen wir mit

$$||f-g||_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)-g(x)|$$

den Abstand dieser Funktionen voneinander.
Die Supremumsnorm $||f||_\infty$ von f auf D ist definiert durch

$$||f||_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

Handelt es sich bei den Funktionen um stetige Funktionen und ist D eine kompakte Menge, z.B. ein abgeschlossenes Intervall, dann gilt

$$||f-g||_\infty := \max_{x\in D} |f(x)-g(x)| \quad \text{bzw.} \quad ||f||_\infty = \max_{x\in D} |f(x)|.$$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

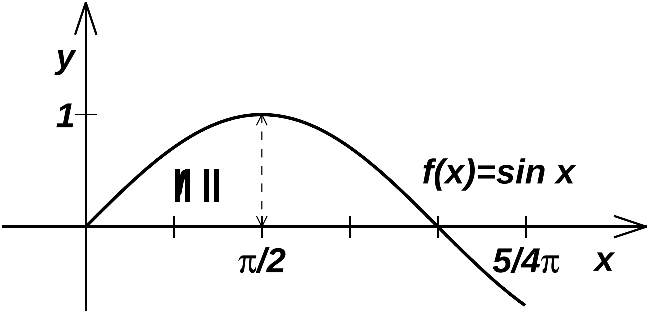

Abbildung 3.3: $||f||_\infty$, **Supremumsnorm von** $f : [0, \frac{5}{4}\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

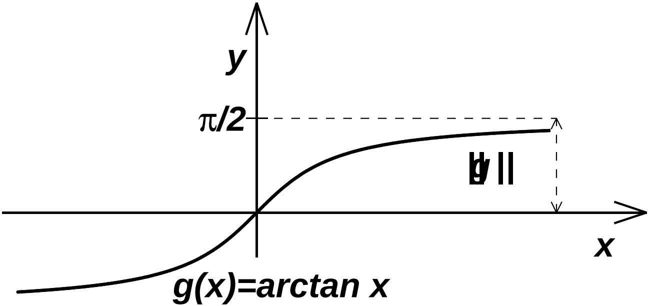

Abbildung 3.4: $||g||_\infty$**, Supremumsnorm von** $g : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g(x) = \text{arctan}\, x$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

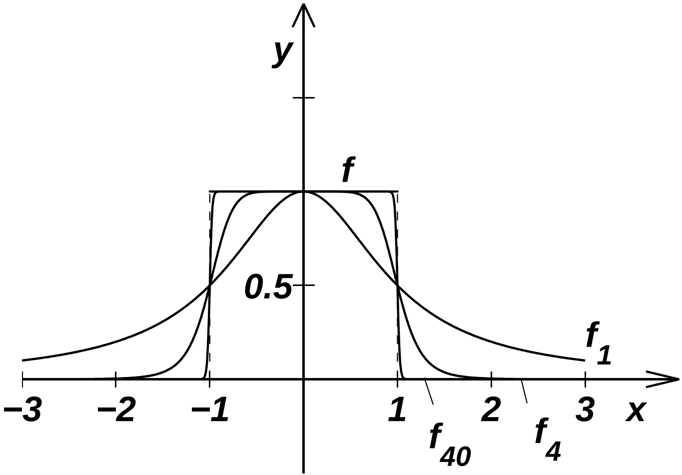

Abbildung 3.7: Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$ und Grenzfunktion f

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Definition 3.7: (gleichmäßige Konvergenz) Eine Funktionenfolge (f_n) auf D konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f auf D, wenn von einem Index n_0 an alle Funktionen $f_n - f$ beschränkt sind und

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

gilt. In diesem Falle schreibt man auch kürzer

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \qquad \text{oder} \qquad f_n \to f \text{ für } n \to \infty.$$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Satz 3.13: (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)
Eine Funktionenfolge (f_n) auf D ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt

$$||f_n - f_m||_\infty < \epsilon.$$

Satz 3.14: (Stetigkeit der Grenzfunktion) Jede gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen (f_n) hat eine stetige Grenzfunktion f.

Anders ausgedrückt; mit $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \in D$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty}(\lim_{n\to\infty} f_n(x_k)).$$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Satz 3.15: (gliedweise Differentiation) Sind (f_n) und (f_n') auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergent und gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f,$$

so ist f auf $[a, b]$ differenzierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f'.$$

Buch Kap. 3.2 – Funktionenfolgen

Satz 3.16: (gliedweise Integration) Ist (f_n) eine auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen, so ist deren Grenzfunktion

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Definition 3.8: (Funktionenreihe) Sei (f_n) eine Funktionenfolge auf D, dann definieren wir durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \ , \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

eine neue Funktionenfolge (s_n) und nennen diese Folge Funktionenreihe der f_k. Die f_k heißen Glieder der Reihe und die s_n Teil- oder Partialsummen. Wir beschreiben die Reihe auch durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \ \text{ mit } x \in D.$$

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Definition 3.9: (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist punktweise bzw. gleichmäßig konvergent, falls die Folge (s_n) der Teilsummen punktweise zw. gleichmäßig konvergent ist.

Die Grenzfunktion $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ wird auch Summe der Reihe oder Summenfunktion genannt und durch

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \ (x \in D) \quad \text{oder} \quad s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

bezeichnet.

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.17: (Cauchy Kriterium für gleichmäßige Konvergenz bei Reihen) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von Funktionen auf D konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn Folgendes erfüllt ist:

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_0, so dass für alle n, m mit $m > n \geq n_0$ gilt

$$\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\|_\infty < \epsilon \; .$$

Definition 3.10: (gleichmäßige absolute Konvergenz) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von beschränkten Funktionen auf D heißt gleichmäßig absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||f_k||_\infty$$

konvergiert.

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.18: (Majorantenkriterium von WEIERSTRASS) Gilt für die Glieder der Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ von einem Index k_0 an

$$||f_k||_\infty \leq \alpha_k \quad (k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots)$$

und ist die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ konvergent, so ist die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig absolut konvergent. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ heißt eine Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.19: (Stetigkeit der Reihensumme) Sind die Glieder einer in $D = [a, b]$ gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ in $[a, b]$ stetig, so ist die Summe

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

ebenfalls stetig in $[a, b]$. In den Randpunkten ist einseitige Stetigkeit von f_k bzw. s gemeint.

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.20: (gliedweises Differenzieren) Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe auf $[a, b]$ differenzierbarer Funktionen. Existiert der Grenzwert

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

für wenigstens ein $x \in [a, b]$, und ist die Ableitungsreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'$$

gleichmäßig konvergent in $[a, b]$, so ist auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent in $[a, b]$, die Summe $s(x)$ ist differenzierbar und es gilt

$$s'(x) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k' \text{ (gliedweise differenzieren).}$$

Satz 3.21: (gliedweises Integration) Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf $[a, b]$ integrierbarer Funktionen besitzt auf $[a, b]$ eine integrierbare Summenfunktion $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ und es gilt

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx\ .$$

Buch Kap. 3.3 – Gleichmäßig konvergente Reihen

Satz 3.20: (gliedweises integrieren) Jede gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ auf $[a, b]$ integrierbarer Funktionen besitzt eine auf $[a, b]$ integrierbare Summe

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

und es gilt

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$