Integration mit Hilfe von Interpolation

Ausgangsaufgabenstellung

geg.: $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$

mit $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$ und $f_i = f(x_i)$

mit einer i.d.R. unbekannten Funktion f.

i.) Näherungsweise Darstellung von f

ii.) — " — Wert von $\int_a^b f(x)\,dx$

Zu i.) Finde Modell für f, welches möglichst oft differenzierbar ist

__Ansatz__: $f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

mit $p_n(x_i) = f_i$ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

Aufgabe eindeutig lösbar $\Rightarrow$ Letzte VL Analysis 1

090608 (2)

Das eindeutig bestimmte Interpolations-polynom ist gegeben durch

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, L_i(x)$$

wobei

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{x_i - x_j}$$ i-tes Lagrange Polynom

Es gilt: i) L_i Polynom n-ten Grades

ii) $L_i(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$

Damit

$$p_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, L_i(x_k) = f_k,$$

d.h. p_n löst Interpolationsaufgabe

030608 (3)

$f(x) \approx p_n(x)$

$$\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx$$

Bsp: $(x_0, f_0) = (1,1)$, $(x_1, f_1) = (2,3)$
$(x_2, f_2) = (3,2)$ $\quad n = 2$

i.) Benutze (x_0, f_0), $(x_2, f_2) =: (\tilde{x}_1, \tilde{f}_1)$
$\tilde{n} = 1$

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx \int_1^3 p_1(x)\,dx$$

mit $p_1(x) = f_0 L_0(x) + \tilde{f}_1 \tilde{L}_1(x)$
$= 1 + \frac{x-1}{2} \cdot 2$,

Also
$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx \int_1^3 1 + \frac{x-1}{2} \cdot 2\,dx = 4$$

ii) Benutze alle Daten

$$p_2(x) = 1\,\frac{(x-3)(x-2)}{(1-3)(1-2)} + 2\,\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} + 3\,\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

Damit

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx \int_1^3 p_2(x)\,dx = 5$$

Für den Interpolationsfehler gilt

überprüfen, ob = n

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$\forall x \in [a,b]$$

$$\rightarrow \int_a^b |f(x) - p_n(x)|\,dx$$

$$\leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)|$$

Achtung: Interpolationsfehler kann sehr groß werden, auch bei Interpolation glatter Funktionen

Bsp.: $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, $x \in [-1,1]$

Runge Funktion

Ausweg: Spline-Approximation

Def.: $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt

Spline k-ter Ordnung auf der

Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

falls

i.) s $(k-1)$-mal stetig diffbar auf $[a,b]$

ii) $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ Polynom k-ten Grades

s interpoliert (x_i, f_i) $(i = 0, 1, \dots, n)$,

falls

iii) $s(x_i) = f_i$ $\quad i = 0, 1, \dots, n$

erfüllt ist

Wichtig: $k = 1$ linearer Spline, siehe summierte Trapezregel

$k = 3$ kubischer Spline

Konvergenz von Funktionenfolgen

Seien

$$f_k : I \to \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Funktionen. Dann heißt $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Funktionenfolge.

Ist (f_k) Funktionenfolge und $x \in I$, so ist $(f_k(x))$ reelle Zahlenfolge

(f_k) konvergiert <u>punktweise</u> gegen f gdw

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

<u>Bsp.</u>: i.) $f_k(x) := x^k$, $x \in I := [0,1]$

$$\to \lim_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} x^k = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

090608 ⑦

ii) $f_k(x) := \dfrac{1}{1+x^{2k}}$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 1 & , |x|<1 \\ \frac{1}{2} & , |x|=1 \\ 0 & , |x|>1 \end{cases}$$

Stärkerer Konvergenzbegriff soll liefern: (f_k) konvergiert gegen f und f_k stetig $\rightarrow$ f stetig

Def.: (f_k) konvergiert gleichmäßig gegen f gdw

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in I} |f(x)-f_k(x)| = 0$$

gilt. Wir schreiben dann

$$\lim_{k\to\infty} f_k = f$$