Numerische Integration

$\int_a^b f(x)\,dx$ "näherungsweise"

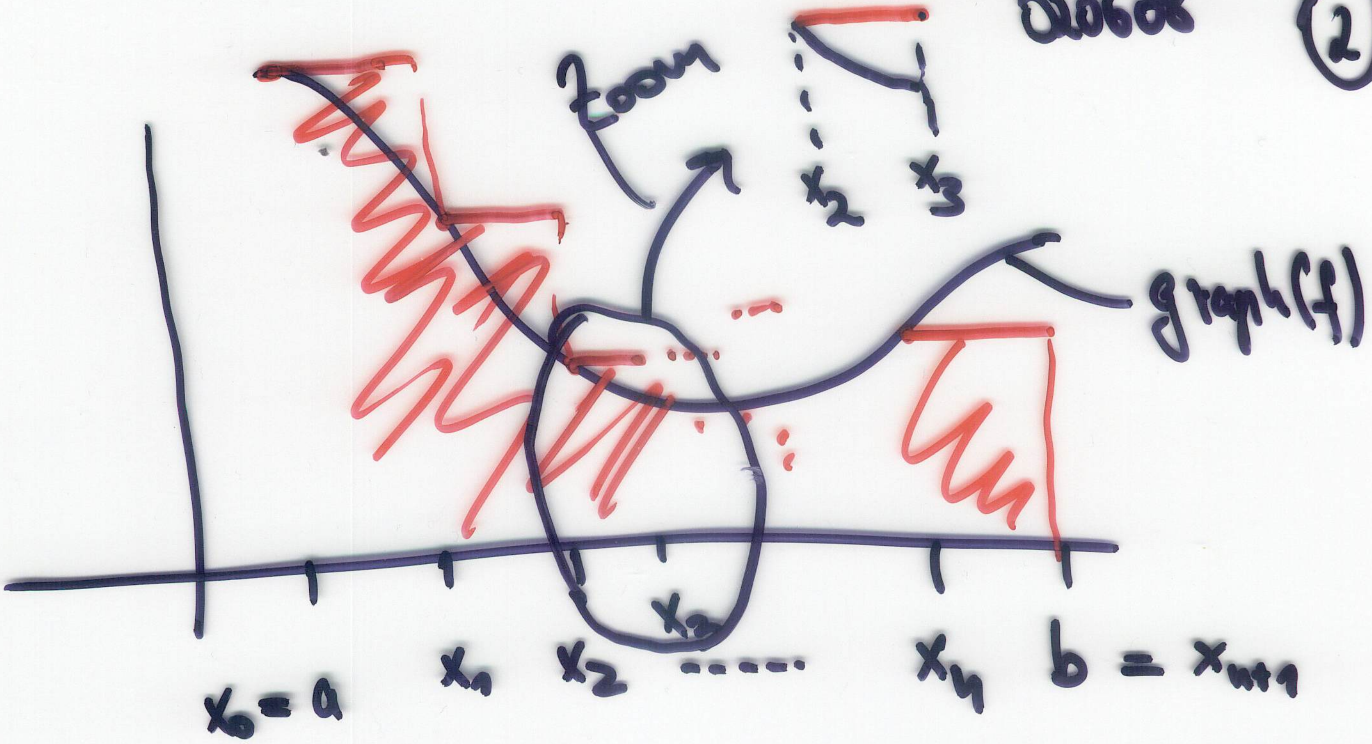
berechnen, falls keine Stammfunktion zu f bekannt ist

<u>Wichtig</u>: Ist $Q(f)$ "Näherung" an $\int_a^b f(x)dx$, so sollte Fehler

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

kontrolliert werden können.

<u>Idee 1</u>: Betrachte Riemann-Summen (bzw. Ober- und Untersumme) als Näherungen für $\int_a^b f(x)dx$



$\approx \int_a^b f(x)\,dx$ Rechteck Regel

$$Q_1(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

Frage: $\int_a^b f(x)\,dx - Q_1(f) = ?$

$$\sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \right]}_{\text{Fehler im Zoom}}$$

Betrachte

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Situation: $t < s$

$$\int_t^s f(x)\,dx - f(t)(s-t)$$

Darstellung des Fehlers

Betrachte $\varphi(\overset{x}{\cancel{t}}) = s - x$, $\varphi'(x) = -1$

Es gilt

$$-\int_t^s f(x)\,dx \overset{\varphi'(x)=-1}{=} \int_t^s f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

$$\overset{\text{part. Integr.}}{=} f(x)(s-x)\Big|_t^s - \int_t^s f'(x)\overbrace{\varphi(x)}^{\geq 0}\,dx$$

$$\underset{\text{MWS}}{\overset{\text{Verallg.}}{=}} -f(t)(s-t) - \underbrace{f'(\xi)\int_t^s s-x\,dx}_{\frac{1}{2}f'(\xi)(s-t)^2}$$

mit $\xi \in (t,s)$

Insgesamt mit $\xi \in (t,s)$:

$$\boxed{\int_t^s f(x)\,dx - f(t)(s-t) = \frac{1}{2}\,f'(\xi)(s-t)^2}$$

Damit ($\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$) 02.06.08 ④

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - f(x_i)(x_{i+1}-x_i) = \frac{1}{2} f'(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)^2$$

Summation ergibt mit $\underbrace{h := x_{i+1}-x_i}_{\text{äquidistante Unterteilung}}$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$$

$$\overset{\xi_i \in (x_i, x_{i+1})}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} f'(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)^2$$

$$= \frac{1}{2} h^2 \sum_{i=0}^{n} f'(\xi_i)$$

$$\overset{h = \frac{b-a}{n+1}}{=} \frac{1}{2} h (b-a) \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f'(\xi_i)}_{\in [\min f', \max f']}$$

Mittelwert von $f(\xi_0), \dots, f(\xi_n)$

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen angewendet auf $f'(x)$:

Es existiert ~~$\xi \in [\min f', \max f']$~~

$\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f'(\xi_i)$

Insgesamt (f 1mal stetig differenzierbar) 020608 5

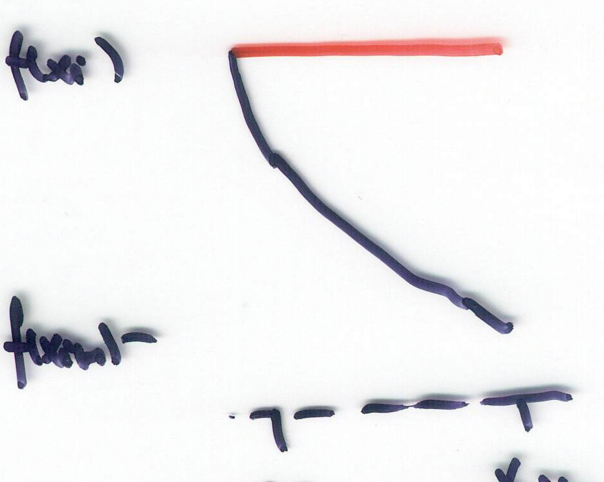
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx - Q_1(f) = \frac{1}{2} f'(\xi)\, h\, (b-a)}$$

mit einem $\xi \in [a,b]$

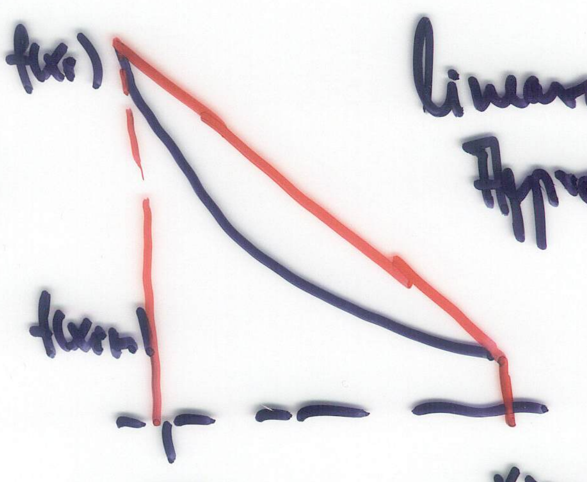
Feinheit der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$

$$\rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q_1(f) \right| \le \frac{1}{2} h \max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)| (b-a)$$

Modellverbesserung



$\longrightarrow$



lineare Approx.

führt auf

$$Q_2(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2} \left(f(x_{i+1}) + f(x_i) \right) (x_{i+1} - x_i)$$

Trapez Regel

Situation lokal 020608 (6)

$$\int_t^s f(x)\,dx - \frac{1}{2}\big(f(s)+f(t)\big)(s-t) = ?$$

Wähle ~~$\varphi(t) = \frac{1}{2}(t$~~ $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-t)(s-x)$

$\rightarrow \varphi'(x) = \frac{s+t}{2} - x \quad \varphi''(x) = -1$

Damit wie bei Rechteck Regel

$$-\int_t^s f(x)\,dx = \int_t^s f(x)\,\varphi''(x)\,dx$$

MWS + 2 mal part. Integr. $\underline{=}$ $+ \frac{1}{12} f''(\xi)(s-t)^3$

$- \frac{1}{2}\big(f(t)+f(s)\big)(s-t)$

Damit

$$\boxed{\int_t^s f(x)\,dx - \frac{1}{2}\big(f(t)+f(s)\big)(s-t) = -\frac{1}{12} f''(\xi)(s-t)^3}$$

mit $\xi \in (a,b)$

$$Q_2(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)(x_{i+1} - x_i)$$

Dann mit einem $\xi \in [a,b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f) = -\frac{1}{12}(b-a)\,h^2 f''(\xi)}$$

bzw

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)\right| \le \frac{b-a}{12} \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|\, h^2$$

Generelle Idee hinter diesem Vorgehen:

Ersetze f durch Polynom p

und berechne

$$\int_a^b p(x)\,dx \quad \text{anstelle von} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

Das geht nur gut, falls
i.) $b-a$ klein
ii) $\deg p$ moderat groß