Kurven, Wdh Bsp vom 190508

$$r(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ at \end{bmatrix}$$

Helix mit Ganghöhe a

$$\dot{r}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ a \end{bmatrix}$$

$$\ddot{r}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\dot{r}(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + a^2} = \sqrt{1+a^2} \neq 0$$

$$t(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\|\dot{r}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ a \end{bmatrix}$$

$$n(t) := \frac{\dot{t}(t)}{\|\dot{t}(t)\|}$$ Normale

$$= \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

260508 ②

Krümmung von Kurven in $\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}_1(t)\,\ddot{x}_2(t) - \dot{x}_2(t)\,\ddot{x}_1(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

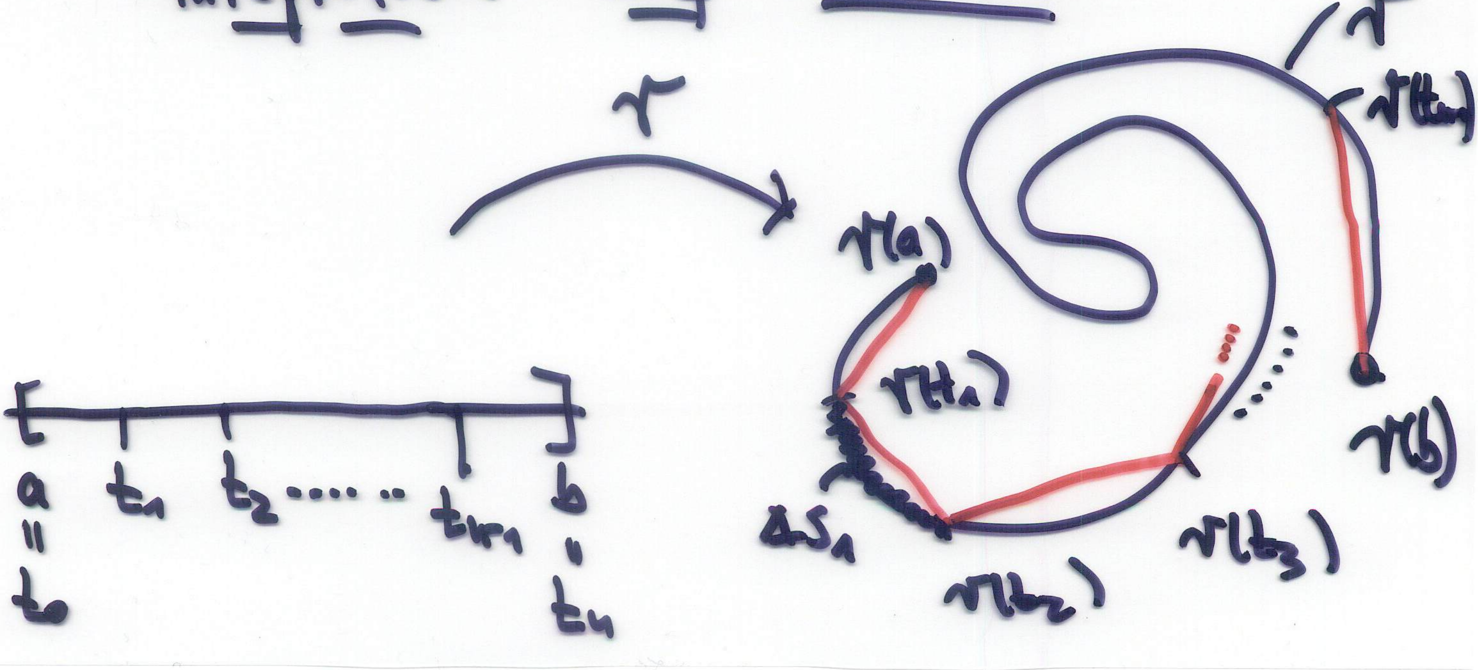
Krümmung

z.B. $\gamma(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$ (Graph von f)

$$\to \kappa(t) = \frac{f''(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}^{\,3}}$$

Krümmung von Graph(f)

Integration auf Kurven



Frage 1: Wie lang ist Kurve γ?

Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

induziert Unterteilung $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ von γ.

$$\text{Kurvenlänge} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|}^{\approx \Delta s_i}$$

mit Δs_i: Bogenlänge der Kurve zwischen $\gamma(t_i)$ und $\gamma(t_{i+1})$

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \overset{\text{MWS}}{=} \dot\gamma(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \quad \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$$

Damit

$$\text{Kurvenlänge} \approx \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \|\dot\gamma(\xi_i)\|(t_{i+1} - t_i)}_{\text{Riemannsumme von}}$$

$$\boxed{s(t) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt}$$ Kurvenlänge

<u>Bsp</u>: i) $r(t) = \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{bmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\dot{r}(t) = R\begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \qquad \|\dot{r}(t)\| = R$$

$$\to \text{Kurvenlänge} = \int_0^{2\pi} \|\dot{r}(t)\|\,dt$$

$$= R\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi R$$

ii) $r(t) = \begin{bmatrix} R\cos mt \\ R\sin mt \end{bmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$

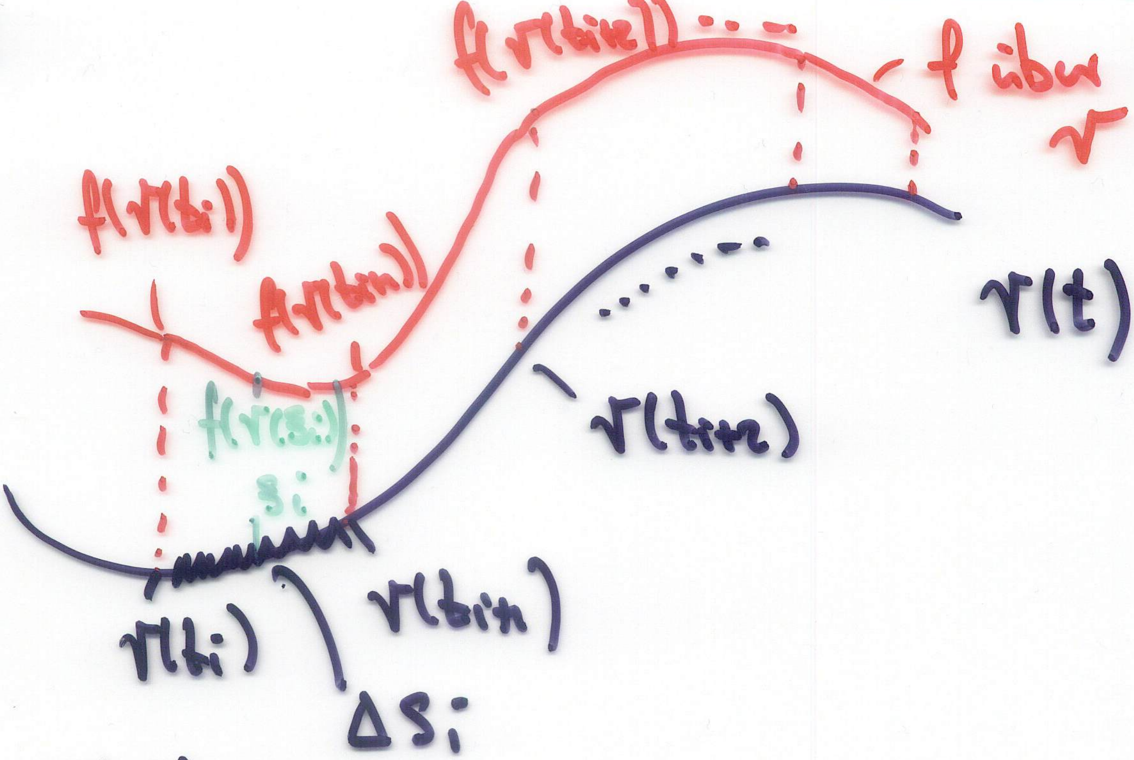
$$\dot{r}(t) = Rm\begin{bmatrix} -\sin(tm) \\ \cos(tm) \end{bmatrix}, \quad \|\dot{r}(t)\| = Rm$$

$$\text{Kurvenlänge} = Rm\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi m R$$

<u>Frage 2</u>: $f : \mathbb{R}^n \supset r([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig

<u>Motivation</u>: f beschreibt Schneelast auf Hochspannungsleitung $\longrightarrow$ Gesamtlast = ?

260508



$$\int_{\gamma(t_i)}^{\gamma(t_{i+1})} f\,ds \approx \underbrace{\|\dot{\gamma}(\xi_i)\|\, f(\gamma(\xi_i))\,(t_{i+1}-t_i)}_{f(\gamma(\xi_i))\,\Delta s_i}$$

Damit

$$\int_\gamma f\,ds \approx \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(\xi_i))\,\|\dot{\gamma}(\xi_i)\|\,(t_{i+1}-t_i)}_{\text{Riemann-Summe von}}$$

$$\| $$

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$$

260508 ⑥

Bsp i) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(t) = R \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \qquad \|\dot\gamma(t)\| = R$$

$$f(\gamma(t)) = (R\cos t)^2 - (R\sin t)^2$$
$$= R^2(\cos^2 t - \sin^2 t) = R^2 \cos 2t$$

Demnach

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} R^2 \cos 2t \; R\, dt$$
$$= \frac{1}{2} R^3 \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

ii) $f(x,y,z) = c\left[1 + \cos\left(4 \arctan \frac{y}{x}\right)\right]$

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} R \cos\frac{\pi}{4} \cos t \\ R \cos\frac{\pi}{4} \sin t \\ R \sin\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$R \approx 6370$ km

$\frac{1}{4}$ Breitenkreis auf Höhe von Mitteleuropa – Nordamerika

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{R}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 0)^t$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$f(\gamma(t)) = G\left[1 + \cos\left(4 \arctan \frac{\sin t}{\cos t}\right)\right]$$
$$= G[1 + \cos(4t)]$$

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$= \frac{R}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} G[1 + \cos(4t)] \, dt = \frac{GR}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2}$$

Anwendung: f beschreibt Schadstoffausstoß eines Flugzeugs, $\int_\gamma f \, ds$ beschreibt Gesamt-Schadstoffbelastung.

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Kurvenintegral erster Art.

Numerische Integration von Funktionen

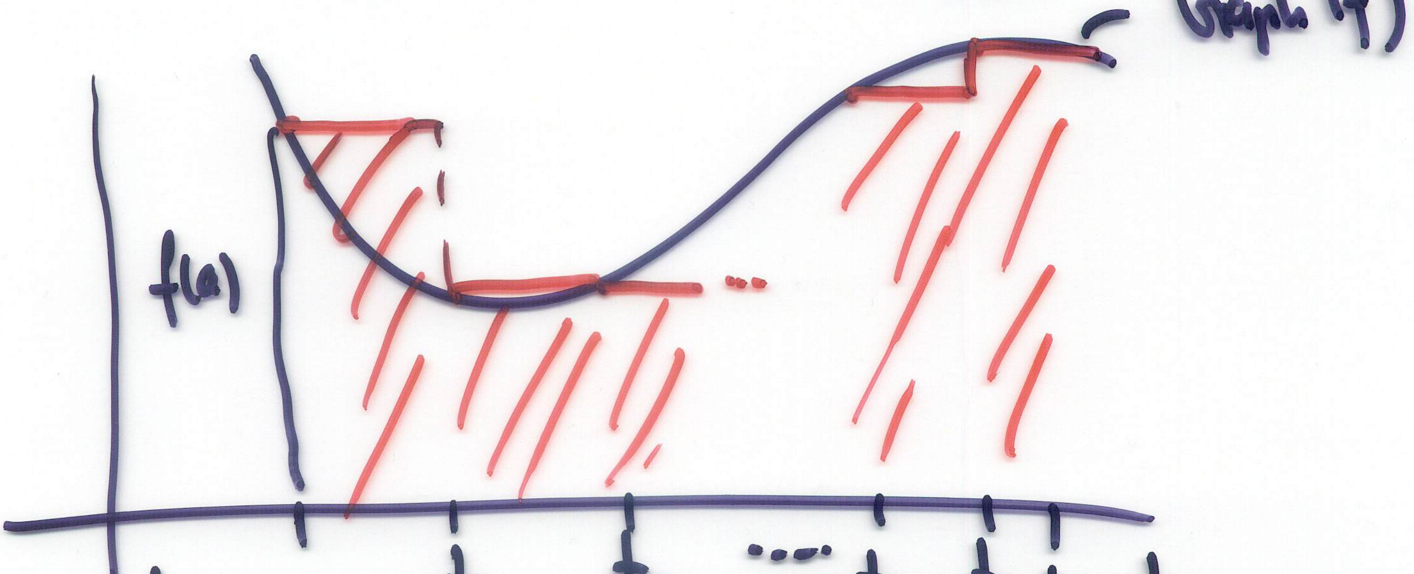
$\underbrace{\text{Numerische Integration}}_{\text{Quadratur}}$

Stammfunktion zu f nicht bekannt

Aufgabe: Berechne $\int_a^b f(t)\,dt$

i) näherungsweise

ii) und gebe Fehler bei der näherungsweisen Berechnung an.



$$/// \approx \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(t_i)(t_{i+1} - t_i) =: Q_n(f)$$

Rechtecke-Regel

Riemann-Integral Ober- bzw Untersumme !

Sei f einmal stetig diffbar. Fehler in der Quadratur = ?

Betrachte $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - f(\alpha)(\beta-\alpha)$

$= ?$

Sei $\varphi(t) = \beta - t \geqslant 0$ auf $[\alpha,\beta]$

$\varphi'(t) = -1$

Damit

$$-\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\overset{\text{part.}}{\underset{\text{Int.}}{=}} f(t)\,\varphi(t)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(t)\underbrace{\varphi(t)}_{\geqslant 0}\,dt$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} -f(\alpha)(\overset{\text{beta}}{\beta}-\alpha) - f'(\xi)\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt$$

$$= -f(\alpha)(\underset{\text{beta}}{\beta}-\alpha) - f'(\xi)\,\frac{1}{2}\,(\beta-\alpha)^2 \qquad \xi\in(\alpha,\beta)$$