Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

19. Mai 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html

Buch Kap. 2.12, 5.3 – Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.30 (vergl. Def. 5.13):(Kurve im $\mathbb{R}^n$) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.

Jede Abbildung

$$\mathbf{x} : [a, b] \to G, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ heißt Kurvenstück in G mit dem Anfangspunkt $\mathbf{x}(a) = (x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a))^T$, dem Endpunkt $\mathbf{x}(b) = (x_1(b), x_2(b), \ldots, x_n(b))^T$ und der Spur $\{\mathbf{x}(t) \mid a \le t \le b\}$.

Buch Kap. 2.12, 5.3 – Kurven im $\mathbb{R}^n$

Fortsetzung Definition 2.30: Ein Kurvenstück heißt regulär, falls $x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots x_n'(t)^2 \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt.

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$$

heißt Parameterdarstellung des Kurvenstückes mit dem Parameter t.

Eine Aneinanderreihung von Kurvenstücken K_i, $i = 1, \dots, r$, wobei der Anfangspunkt von K_i jeweils mit dem Endpunkt von K_{i-1}, $i = 2, \dots, r$, übereinstimmt, heißt Kurve. Ist nur ein Kurvenstück vorhanden, wird es i. Allg. auch als Kurve bezeichnet. Dann schreiben wir (vergl. Def. 5.13)

$$\gamma(t) \equiv \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$$

Buch Kap. 5.3 – Kurven im $\mathbb{R}^n$

Defintion 5.15: (Tangentenvektor) Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve (d.h. $\|\dot{\gamma}(t)\| > 0$ für alle $t \in [t_a, t_e]$). Mit

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \text{ für } t \in [t_a, t_e]$$

bezeichnen wir den Tangentenvektor an die Kurve γ.

Die Gleichung der Kurventangente in $\gamma(t_0)$ lautet

$$\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) .$$

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

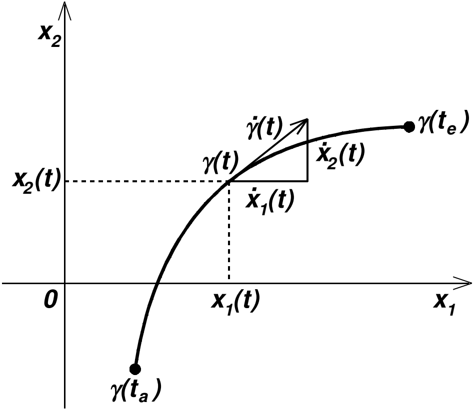

Abbildung 7.2: Bezeichnungen bei Kurven γ im $\mathbb{R}^2$

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Defintion 7.6 (Bogenelement einer Kurve im $\mathbb{R}^n$)

Sei $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T,\ t \in [t_a, t_e]$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen wir mit

$$ds = \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \cdots + \dot{x}_n^2(t)}\, dt =: \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

das Bogenelement der Kurve (an der Stelle $\gamma(t)$).

Defintion 5.14: (Bogenlänge)
Sei $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

$$s(t) := \int_{t_a}^{t} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

bezeichnen wir als Bogenlänge des Kurvenstücks über $[t_a, t]$.

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Defintion 7.7: (Skalares Kurvenintegral einer Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \to \mathbb{R}$ sei auf allen Punkten einer Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann heißt

$$\int_\gamma f\, ds := \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

skalares Kurvenintegral der Funktion f (bzw. Kurvenintegral erster Art).

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Schritte zur Berechnung des skalaren Kurvenintegrals einer Funktion

1) **Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Kurve** $\gamma : [t_a, t_e] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

2) **Berechnung der Funktionswerte** $f(\gamma(t))$ **der Belegungsfunktion**

3) **Berechnung von** $\|\dot{\gamma}(t)\|$

4) **Berechnung des Kurvenintegrals**

$$\int_\gamma f\, ds = \int_{t_a}^{t_e} f(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t)\|\, dt.$$

Buch Kap. 7.4 – Skalare Kurvenintegrale

Satz 7.1:(Rechenregeln für Kurvenintegrale und Mittelwertsatz)

Sei γ eine Kurve und $f,\ g : \mathbb{R}^n \supset \gamma([t_a, t_e]) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Regeln

(i) $\int_\gamma (f+g)ds = \int_\gamma f\, ds + \int_\gamma g\, ds$ **(Additivität des Integrals)**

(ii) $\int_\gamma \alpha f\, ds = \alpha \int_\gamma f\, ds$ **(Homogenität des Integrals)**

(iii) $\int_\gamma f\, ds = f(\gamma(\tau)) \cdot L$ **(Mittelwertsatz)**

Dabei ist L die Länge der Kurve und $\gamma(\tau)$ ein geeigneter Kurvenpunkt.