Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

5. Mai 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben → http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html

Buch Kap. 2.16 – Uneigentliche Integrale

- **Satz 2.42: Sei $f(x) \geq 0$ und monoton fallend.**

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

- **Satz 2.43: $f(x) \geq 0$ und $g(x) \geq f(x)$ auf $[a,\infty)$, dann:**

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ konvergent } \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \;\text{ konvergiert}$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ divergent } \Longrightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ divergiert .}$$

- **Satz 2.44: $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergent $\Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent.**
- **Satz 2.45: f sei über jedes beschränkte Teilintervall von $[a,\infty)$ $(a > 0)$ integrierbar, $c \geq a$ und $M > 0$.**
  a) $f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x \geq c}$ **mit** $\alpha > 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ **konvergent,**
  b) $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha} \forall_{x \geq c}$ **mit** $\alpha \leq 1 \Longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ **divergent.**

Buch Kap. 2.15 – Parameterintegrale, Beispiele

- **Gamma Funktion (interpoliert die Fakultät)**

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

- **Bessel Funktionen (Ausbreitung von Wellen, Schwingungsverhalten elastischer Körper)**

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

- **Laplace Transformierte einer Funktion *f* (Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen in Lösung algebraischer Gleichungen)**

$$F(x) := \int_0^\infty f(t) e^{-xt} dt.$$

Buch Kap. 2.15 – Parameterintegrale

Satz 2.39: (Differentiation bestimmter Parameterintegrale) **Seien $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle und die Funktion $f(x, y)$ in $[a, b] \times [c, d]$ sei stetig bezüglich des Parameters x und integrierbar bezüglich der Veränderlichen y. Dann gilt für das Parameterintegral**

$$F(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad a \leq x \leq b,$$

a) **F ist in $[a, b]$ stetig,**
b) **ist f zusätzlich auf $[a, b]$ nach dem Parameter x stetig differenzierbar, dann ist F differenzierbar und hat die Ableitung**

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d \frac{d\, f(x, y)}{d\, x}\, dy\ .$$

Buch Kap. 2.15 – Parameterintegrale, Leibniz Regel

Satz 2.40: (Leibniz – Regel)

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 2.39. Seien ferner $h(x)$ und $g(x)$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy =$$

$$= \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{d\, f(x, y)}{d\, x} \, dy + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x) \; .$$

Buch Kap. 2.14 – Rotationskörper

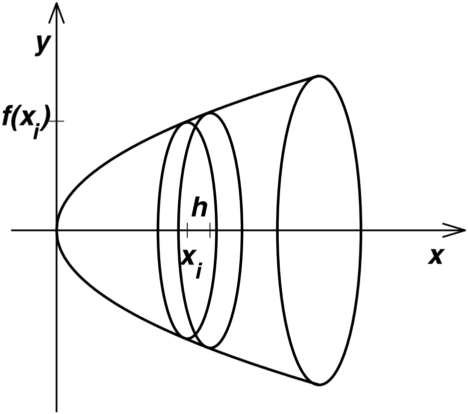

Abb. 2.61: Rotationskörper, durch $f(x)$ erzeugt

Buch Kap. 2.14 – Rotationskörper, Volumen

Das Volumen des von der Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ erzeugten Rotationskörpers wird durch

$$V := \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

erklärt.

Buch Kap. 2.14 – Rotationskörper, Mantelfläche

Die Oberfläche des von Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}_0^+$ erzeugten Rotationskörpers lässt sich durch

$$F := 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

berechnen.