28.04.08 1

Wdh uneigentliche Integrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s>1 \\ \text{divergent} & s \le 1 \end{cases},$$

denn

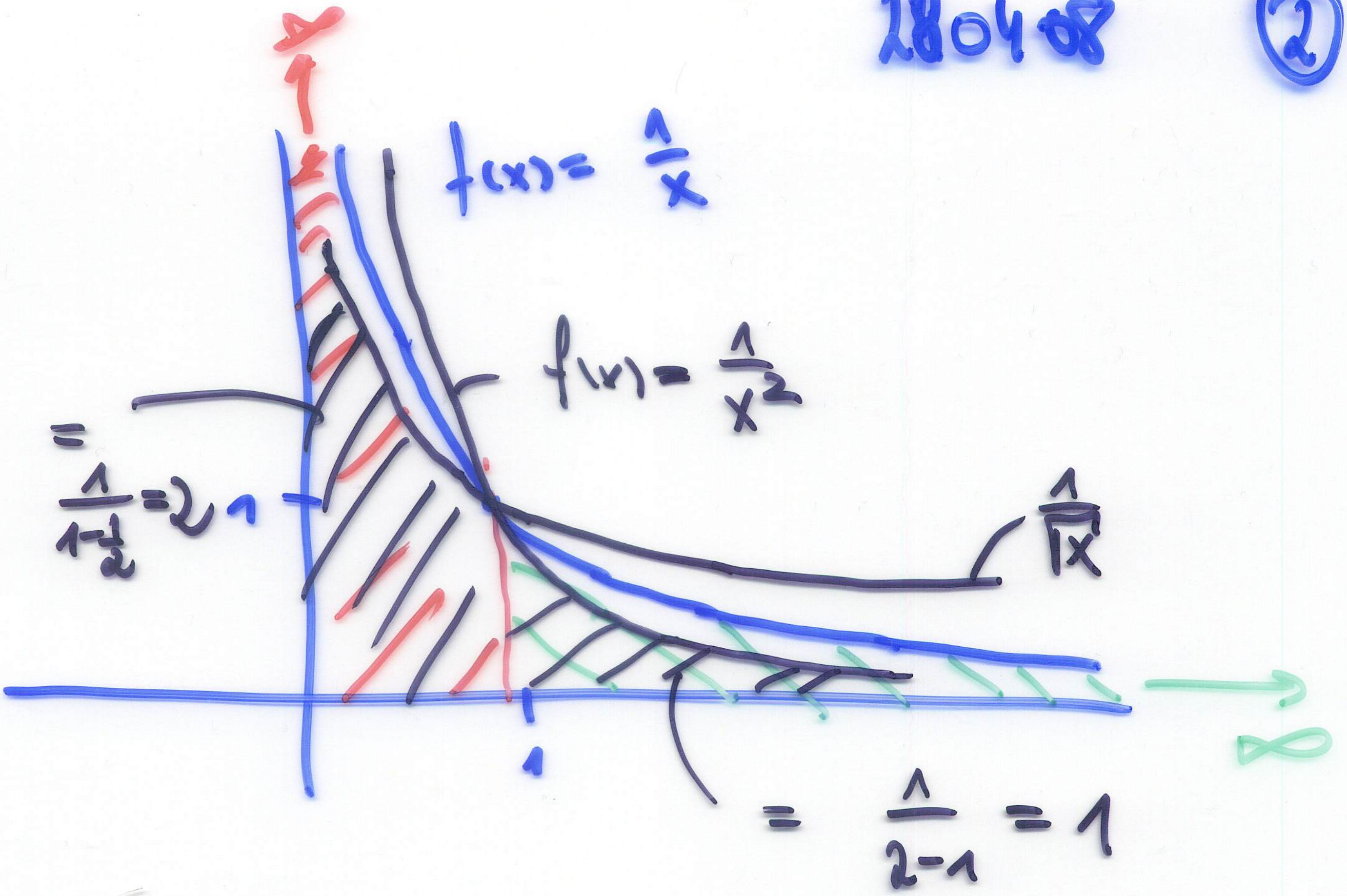
$$\int_1^R \frac{1}{x^s}\,dx \overset{s \neq 1}{=} \int_1^R x^{-s}\,dx = \frac{1}{-s+1}\, x^{-s+1}\Big|_1^R$$

$$= \frac{1}{1-s} R^{1-s} - \frac{1}{-s+1} 1^{1-s} \quad (*)$$

$$\to \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & s>1 \\ \text{divergent}, & s \le 1 \end{cases}$$

$s=1$: in $(*)$ $\underbrace{\ln R}_{\to \infty\ (R\to\infty)} - \underbrace{\ln 1}_{=0}$

Analog: $$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s}, & s<1 \\ \text{divergent}, & s \ge 1 \end{cases}$$



<u>Beachte</u>: $f(x) = \frac{1}{x^3}$ wichtig als Majorante / Minorante

<u>Bsp</u>: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C_1$$

$$\rightarrow \int_{-R}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 0 - \arctan(-R)$$

$$\int_{0}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan R - \arctan 0$$

Damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 0 - \lim_{R\to\infty} \arctan(-R)$$

$$+ \lim_{R\to\infty} \arctan R - \arctan 0$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Analog: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left(\int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(0) - \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin(-1+\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin(0)$$

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi .$$

Existenzaussagen für uneigentliche Integrale

i.) Cauchy - Kriterium

Bsp: ~~$\int^\infty \sin x$~~ $\int_0^\infty \sin x \, dx = ?$

IA: $\int_0^\infty \sin x \, dx$ konvergent

Dann gibt es zu jedem $0 < \varepsilon < 2$ ein $X_\varepsilon > 0$ mit

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx \right| < \varepsilon \quad \forall_{X_\varepsilon < x_1 < x_2}$$

(Cauchy - Kriterium)

z.B. zu $\varepsilon = 1$ gibt es X_1 mit

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx \right| < 1 \quad \forall_{X_1 < x_1 < x_2}$$

Wähle $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = (2k+1)\pi$

mit k so groß, daß $X_1 < x_1 < x_2$ erfüllt ist

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx\right| = \left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \, dx\right|$$

$$= -\cos x \Big|_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} = 2$$

Widerspruch zu $\left|\int_{x_1}^{x_2} \sin x \, dx\right| < 1$!

$\rightarrow \int_0^\infty \sin x \, dx$ divergent.

ii) Fresnel Integral

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = ?$$

Betrachte

$$\int_{x_1}^{x_2} \sin(x^2)\, dx \overset{x^2 = t}{=} \int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt$$

$$\overset{\text{part. Integr.}}{=} -\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\Big|_{x_1^2}^{x_2^2} - \frac{1}{4}\int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}^3}\, dt$$

Beachte $|\cos t| \leq 1$

Damit

$$\int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt \le \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{\cancel{2}\,4}\int_{x_1^2}^{x_2^2} \frac{1}{\sqrt{t}^{\,3}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \frac{1}{2x_1} - \frac{1}{2x_2} = \frac{\cancel{2}\,1}{x_1} < \cancel{2}\,\varepsilon$$

falls $x_2 > x_1 > X_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}$

$\rightarrow \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ konvergent.

Es gilt: $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Achtung: Das haben wir <u>nicht</u> nachgewiesen.

<u>Gamma Funktion</u>

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt, \quad x > 0$$

uneigentliches Integral bei „∞" $\forall x > 0$

|—| |—| bei „0" $0 < x < 1$

Frage: konvergiert $\Gamma(x)$?

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Damit betrachte

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Fall i.) $0 < x < 1$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 t^{x-1} \cdot 1\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{t^x}{x}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{x} - \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varepsilon^x}{x}$$

$$= \frac{1}{x}$$

Fall ii) $x \geq 1$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 \underbrace{t^{x-1} e^{-t}}_{\text{stetig für } x \geq 1}\, dt$$

280408 8

$$\lim_{T\to\infty}\int_1^T t^{x-1}e^{-t}\,dt \overset{i)\ 0<x<1}{\leq} \underbrace{\lim_{T\to\infty}\int_1^T e^{-t}\,dt}_{e^{-1}}$$

ii) $x \geq 1$

$$\lim_{T\to\infty}\int_1^T t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

$$\overset{\text{part. Integr.}}{=} \lim_{T\to\infty}\left\{ -t^{x-1}e^{-t}\Big|_1^T + (x-1)\int_1^T t^{x-2}e^{-t}\,dt \right\}$$

part. Integr.
.... Konvergenz !
+ L'Hospital

Damit: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$

konvergiert

$\Gamma(x)$ heißt Gamma Funktion

Es gilt

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \forall_{x>0}$$

Nachweis fleiß! bzw am 5.5.08

Folgerung: $x = n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\,\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\,\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2) \\ &\;\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdot\Gamma(1)\end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-t}\,dt = 1$$

$$\rightarrow \quad \Gamma(n+1) = n! \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

D.h. Γ - Funktion interpoliert die Fakultät.