Analysis II

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

14. April 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/08/index.html

Buch Kap. 2.13 – Erster und 2ter Hauptsatz

Satz 2.37: (erster Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung) Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall I stetig, dann ist die Funktion F, definiert durch

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \qquad (x, a \in I),$$

eine Stammfunktion von f.

Satz 2.38: (zweiter Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung) Ist F Stammfunktion einer auf einem Intervall I stetigen oder R-integrierbaren Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, so gilt für beliebige $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: \int f(x)dx.$$

Buch Kap. 2.13 – Integration, Stammfunktion

Definition 2.33 (wiederbesucht):
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I definierte reellwertige Funktion.
Die differenzierbare Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$F' = f$$

heißt Stammfunktion von f.
Ist F eine Stammfunktion von f, dann heißt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad C = \text{const.},\ C \in \mathbb{R}$$

unbestimmtes Integral der Funktion f. Die Konstante C heißt Integrationskonstante.
Das unbestimmte Integral einer Funktion f ist die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f. Die Funktion $f(x)$ heißt Integrand.

Buch Kap. 2.13 – Integrationsregeln

Satz 2.27: Seien c_1 und c_2 reelle Konstanten und f und g Funktionen, die Stammfunktionen besitzen, dann gilt

$$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x))\, dx = c_1 \int f(x)\, dx + c_2 \int g(x)\, dx.$$

Satz 2.29: (Substitutionsregeln) Sei f stetig auf dem Intervall J und φ stetig differenzierbar auf dem Intervall I, wobei $\varphi(I) \subset J$ gilt und die Umkehrfunktion φ^{-1} existiert. Dann gilt

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \text{ mit } t = \varphi(x)$$

Satz 2.29': (Produktintegration) Ist f stetig und g stetig differenzierbar auf I und ist F eine Stammfunktion zu f auf I, so gilt

$$F(x)g(x) = \int f(x)g(x) + F(x)g'(x) dx.$$

Buch Kap. 2.13 – Substitutionsregeln

Substitutionsregel 1:

1) $\varphi(x)$ **wird durch** t **ersetzt (substituiert),**
2) **wegen** $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ **bzw.** $dt = \varphi'(x)\, dx$ **wird** $\varphi'(x)\, dx$ **durch** dt **ersetzt,**
3) **das Integral** $\int f(t)\, dt$ **wird berechnet (das sollte einfacher als die Berechnung des Integrals** $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$ **sein, sonst wäre die Mühe umsonst!),**
4) t **wird durch** $\varphi(x)$ **ersetzt (Rücksubstitution).**

Substitutionsregel 2:

1) x **wird durch** $\varphi(t)$ **ersetzt (substituiert),**
2) **wegen** $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ **bzw.** $dx = \varphi'(t)\, dt$ **wird** dx **durch** $\varphi'(t)\, dt$ **ersetzt,**
3) **das Integral** $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$ **wird berechnet,**
4) t **wird durch** $\varphi^{-1}(x)$ **ersetzt (Rücksubstitution).**

Buch Kap. 2.13 – Integration rationaler Funktionen

Satz 2.31: Das Polynom $q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ mit $deg\, q = m$ (deg steht für Grad (engl. degree)) und ausschließlich reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m$ besitze r reelle Nullstellen $x_1, \ldots, x_r$ mit Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r$ und s komplexe Nullstellenpaare $(w_1, \overline{w_1}), \ldots, (w_s, \overline{w_s})$ mit Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_s$.
Dann kann q in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegt werden. Es gilt die Zerlegungsformel

$$q(x) = a_m \prod_{k=1}^{r} (x - x_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

$$\text{mit } p_j = 2Re\, w_j,\ q_j = |w_j|^2 \text{ und } \sum_{k=1}^{r} m_k + 2 \sum_{j=1}^{s} n_j = m.$$

Buch Kapitel 2 – Partialbruchzerlegung

Satz 2.32:(reelle Partialbruchzerlegung)
Seien $p_n(x)$ und $q_m(x)$ Polynome mit reellen Koeffizienten, $deg\ p_n = n$, $deg\ q_m = m$ und $n < m$. Auf der Grundlage der Faktorenzerlegung des Nennerpolynoms $q_m(x)$ aus Satz 2.31 gibt es für die echt gebrochen rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$$

genau eine Zerlegung in Partialbrüche der Form

$$r(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{a_{kj}}{(x - x_k)^j} + \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{b_{kj}x + c_{kj}}{(x^2 + p_k x + q_k)^j}.$$

Buch Kap. 2.13 – Schritte Partialbruchzerlegung

1) **Eventuell eine durchzuführende Polynomdivision zur Erzeugung einer echt gebrochen rationalen Funktion,**

2) **Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms bzw. der Zerlegung in lineare und/oder quadratische Faktoren,**

3) **Aufstellung des Ansatzes für die Partialbrüche,**

4) **Bestimmung der Koeffizienten.**

Buch Kap. 2.13 – Partialbruchzerlegung

Ist die Partialbruchzerlegung von $r = \frac{p}{q}$ gemäß Satz 2.32 bekannt, benötigen wir für die Berechnung von $\int r(x)dx$ nur Formeln für

$$\int \frac{a}{(x-r)^m}dx = \begin{cases} a\ln|x-r| & (m=1), \\ \frac{a}{1-m}(x-r)^{-m+1} & (m>1), \end{cases}$$

und

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n}dx = \text{ Rekursionsformel}$$

$\longrightarrow$ **Formelsammlung, bzw. Buch S. 149-150.**