070408 (1)

Rekonstruktion von F aus f und $F' = f$

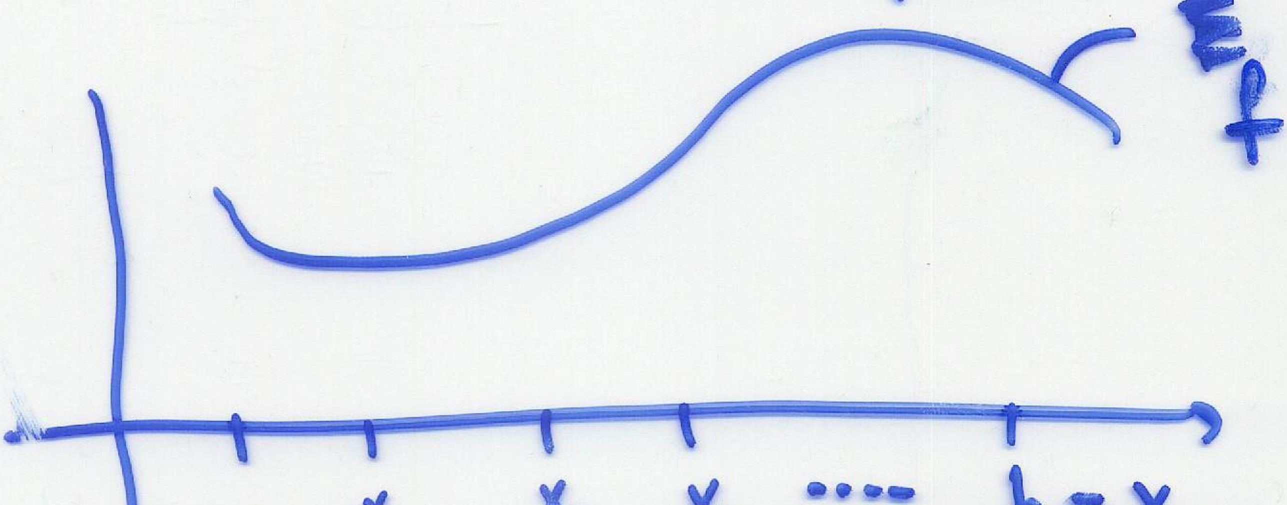
Seien $a < b$ gegeben, $F(a)$

Sei bekannt und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$

Ziel: Berechne $F(b)$

<u>Idee</u>: $F(b) - F(a) \overset{MWS}{=} F'(\xi)(b-a)$

$$= f(\xi)(b-a)$$



$F(b) - F(a) = \underbrace{F(b) - F(x_{n-1})}_{MWS \text{ anwenden}} + F(x_{n-1}) - + \ldots - F(a)$

$Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ Zerlegung

$$F(b) - F(a) \overset{\text{MWS}}{=} f(\xi_n)(b - x_{n-1})$$
$$+ f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})$$
$$+ \dots + f(\xi_1)(x_1 - a)$$
$$=: R(Z)$$

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$s_f(Z) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S_f(Z) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Damit

$$s_f(Z) \le R(Z) \le S_f(Z)$$

Wir folgern für Zerlegungen Z_1, Z_2 immer

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$$
$$s_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$$

$\Rightarrow$

$$\underline{I}_f := \sup_Z s_f(Z) \text{ ex}$$
$$\overline{I}_f := \inf_Z S_f(Z) \text{ ex}$$

mit

$$\underbrace{\underline{I}_f}_{\text{Unter-Integral von } f} \leq \underbrace{\overline{I}_f}_{\text{Ober-Integral von } f}$$

<u>Notiz</u>: f mit

$$\underline{I}_f = \overline{I}_f$$

heißt Riemann-integrierbar.

Bsp: $f(x) = x^2$

Berechne $I = \int_0^a f(x)\,dx$

Idee: Wähle Verfeinerungsfolge $\{Z_k\}$ und zeige

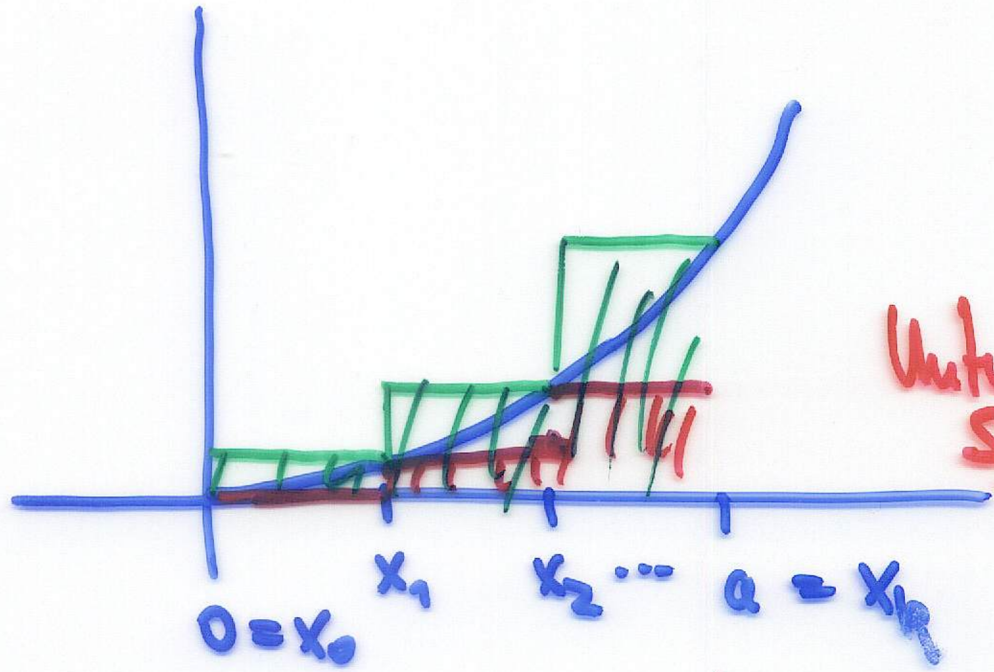
$$\lim_{k\to\infty} s_f(Z_k) = \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_f = \overline{I}_f$$

Hier: $Z_k: 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = a$

mit $x_i := i\,\frac{a}{k} \quad i = 0, 1, \ldots, k$

äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0, a]$.



$$S_f(Z_k) = \sum_{j=1}^{k} f(x_j)\underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\frac{a}{k}}$$

$$s_f(Z_k) = \sum_{j=0}^{k-1} f(x_j)\underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{\frac{a}{k}}$$

$\underline{\text{ferner}}$: $f(x_j) = x_j^2 = \left(j\frac{a}{k}\right)^2$

Damit $S_f(Z_k) = \sum_{j=1}^{k} \left(j\frac{a}{k}\right)^2 \frac{a}{k}$

$$s_f(Z_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \left(j\frac{a}{k}\right)^2 \frac{a}{k}$$

070408 ⑥

$\rightarrow \quad S_f(Z_k) = \left(\frac{a}{k}\right)^3 \sum_{j=1}^{k} j^2$

$s_f(Z_k) = \left(\frac{a}{k}\right)^3 \sum_{j=0}^{k-1} j^2$

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$
$$= \frac{1}{3}k^3 + \mathcal{O}(k^2)$$

$\rightarrow \quad S_f(Z_k) = \frac{1}{3}a^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$

$s_f(Z_k) = \frac{1}{3}a^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{a^3}{3} = \lim_{k\to\infty} s_f(Z_k) = \lim_{k\to\infty} S_f(Z_k)$,

weil $\lim_{k\to\infty} \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) = 0$!

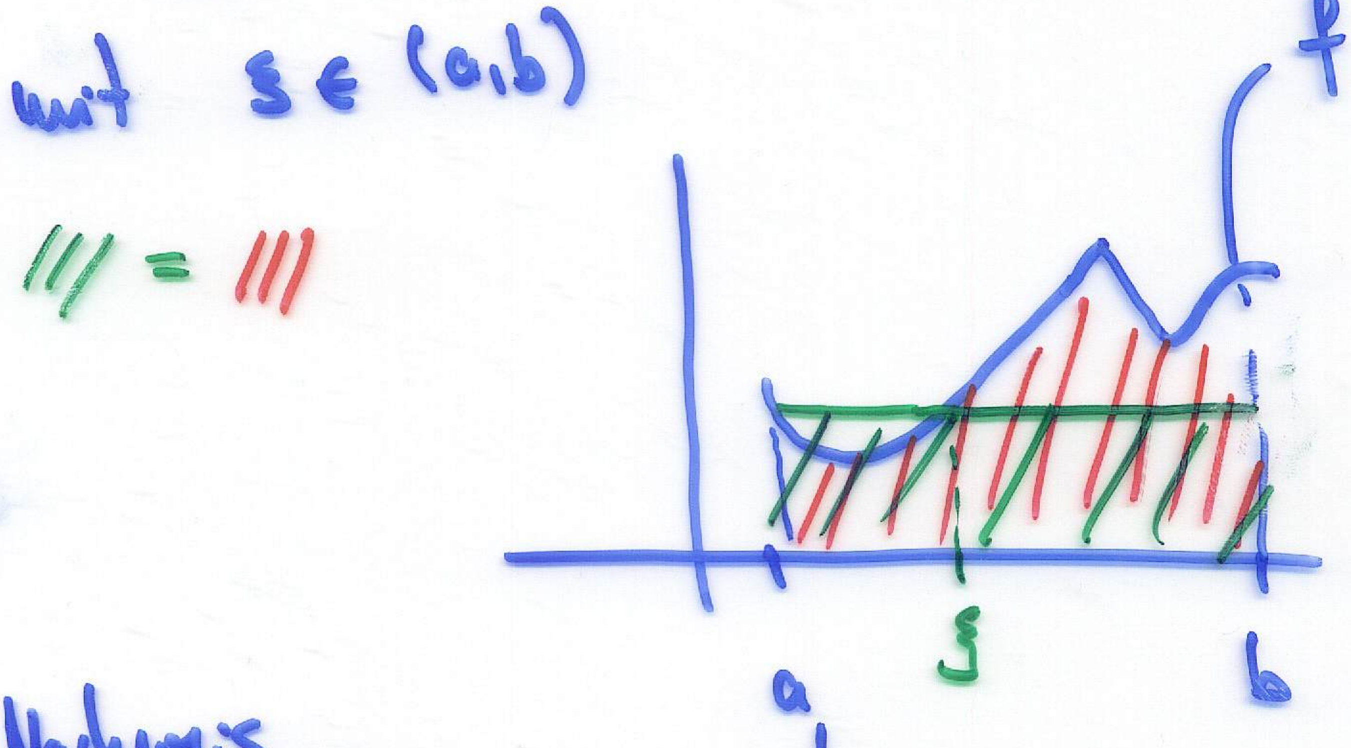
Hier: $\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}a^3$

MWS der Integralrechnung

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

mit $\xi\in(a,b)$



Nachweis

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{const.}} \le \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen liefert: Es gibt $\xi\in(a,b)$ mit

$$f(\xi) = \text{const.} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

$\square$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Stammfunktion von f.

<u>Nachweis</u>: Zeige $F'(x) = f(x)$

$$\lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{F(x+h)-F(x)}{h}} = F'(x)$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{\cancel{h}}\underbrace{f(\xi_h)}\cdot\cancel{h}$$

mit $\xi_h \in (x, x+h)$ $\quad \to f(x)$ $(h \to 0)$

$$\to \quad F'(x) = f(x)$$

$\blacksquare$

Folgerung: F Stammfunktion zu f, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b =: \int f(x)\,dx$$

<u>Bsp</u>: $f(x) = x^n$ $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist Stammfunktion

$$\rightarrow \int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b$$

$f(x) = \sin x$ $F(x) = -\cos x$

$$\rightarrow \int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b$$

⋮

Substitutionsregel

$f: I \to \mathbb{R}$, $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$

mit $\varphi([a,b]) \subset I$.

Dann $F(\varphi(x))' \overset{\text{Kettenregel}}{=} F'(\varphi(x))\,\varphi'(x)$,

also, falls F Stammfunktion zu f ,

$$F(\varphi(x))' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

D.h. $F \circ \varphi$ Stammfunktion zu $(f \circ \varphi)\varphi'$

$$\to \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))\Big|_a^b$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

070408 (11)

<u>Bsp</u>: $\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt \overset{x=\varphi(t)}{\underset{\varphi(t)\neq 0}{=}} \int \frac{1}{x}\,dx$

$$= \ln|x| \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln|\varphi(t)| \Big|_a^b$$

z.B. $\int_a^b \tan t \,dt = \int_a^b \frac{\sin t}{\cos t}\,dt$

$$= -\ln \cos t \Big|_a^b ,$$

wobei $(a,b) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$