01.04.08 (1)

Gegeben: $F'(x) = f(x)$

Frage: Ist F^* aus dieser Beziehung heraus rekonstruierbar?

<u>Beobachte</u>

$$\big(F(x) + G\big)' = F'(x),$$

falls G konstant

Dh. $F'(x) = f(x)$ wird <u>nicht</u> eindeutige Rekonstruktion zulassen!

Sei a gegeben und $F(a)$.

Sei b gegeben, beliebig.

Ist $F(b)$ aus $F(a)$ und "$F'(x) = f(x)$"

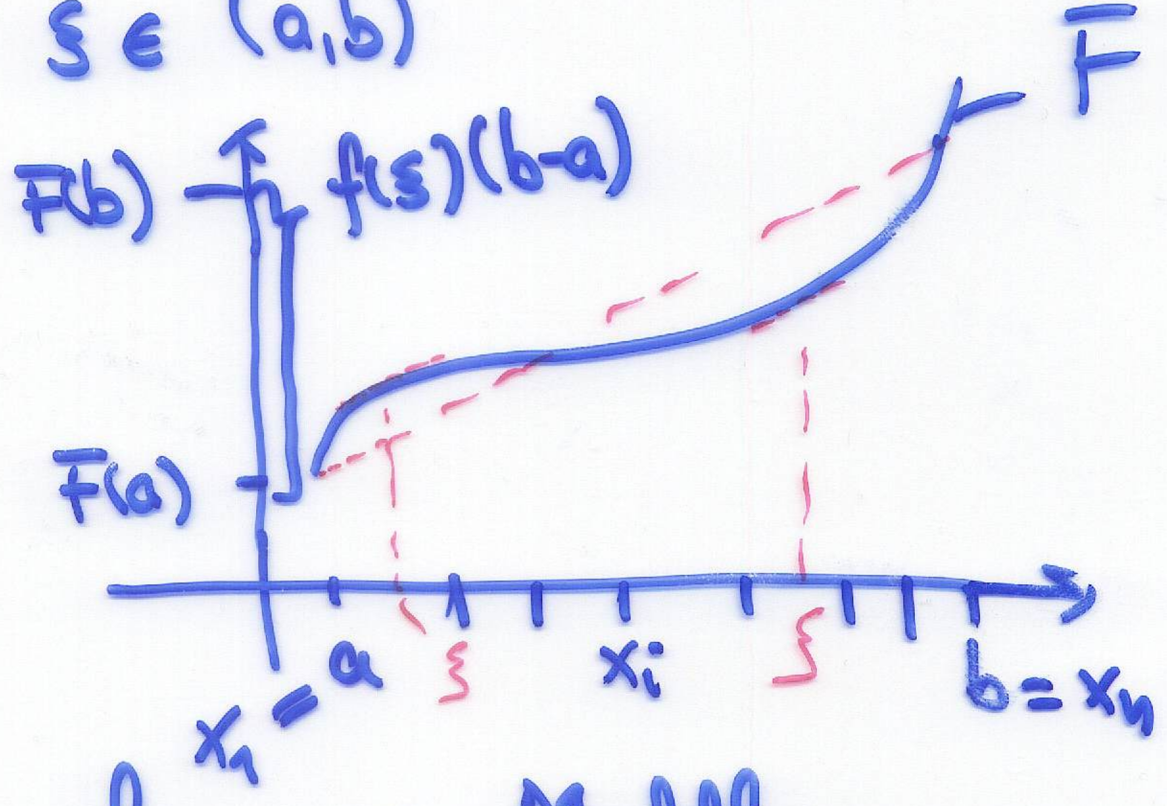
gesucht!

rekonstruierbar?

MWS 2.16

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a)$$
$$= f(\xi)(b-a)$$

mit $\xi \in (a,b)$



↳ lineares Modell

Idee: Zerlege Intervall $[a,b]$

$Z: a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$

Schreibe

$$F(b) - F(a) = F(b) - F(x_n)$$
$$+ F(x_n) - F(x_{n-1})$$
$$+ F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})$$
$$+ \quad \vdots \qquad \vdots$$
$$+ F(x_1) - F(a)$$

$$\overset{\text{MWS 2.16}}{=} \quad f(\xi_n)(b - x_n) \quad \xi_n \in (x_n, b)$$
$$+ f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$
$$+ f(\xi_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2})$$
$$+ \quad \vdots \qquad \vdots$$
$$+ f(\xi_1)(x_1 - a)$$

Riemann-Summe

$R(Z) :=$ Riemann-Summe zur Zerlegung Z

<u>Ziel</u>: Einschliessung von $R(Z)$ zwischen Ober- und Untersummen.

Beachte ($I_i := [x_i, x_{i+1}]$)

$$\underbrace{\min_{x \in I_i} f(x)}_{m_i :=} (x_{i+1} - x_i)$$

$$\leq f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$\leq \underbrace{\max_{x \in I_i} f(x)}_{= M_i} (x_{i+1} - x_i)$$

$$s_f(Z) := \sum_{i=1}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$ Unter-Summe

$$S_f(Z) := \sum_{i=1}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$ Ober-Summe

Damit

$$s_f(Z) \leq R(Z) \leq S_f(Z)$$

für jede Zerlegung Z

<u>Idee</u>: Zeichne Funktionen aus, für die

$$\underline{I}_f := \sup_Z s_f(Z) = \inf_Z S_f(Z) =: \overline{I}_f$$

$\hookrightarrow$ Riemann-Integral