Aufgabe 1) [4+ 6]

a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f(x) := \frac{2}{9-5x}$$

zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und geben Sie das Konvergenzintervall dieser Entwicklung an.

Hinweis: Geometrische Reihe.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{7+\sin(t)}{(2+\sin(t))(3+\sin(t))} \cos(t)\, dt$$

mit Hilfe der Substitution $x := \sin(t)$.

Lösung der Aufgabe 1) [4+ 6 Punkte]

a)

$$\frac{2}{9-5x} = \frac{2}{4-5(x-1)} = \frac{2}{4(1-\frac{5}{4}(x-1))} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{4}(x-1)\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{2\cdot 4^k}\,(x-1)^k$$

Die geometrische Reihe in der ersten Zeile der Formel konvergiert genau dann, wenn

$$\left|\frac{5}{4}(x-1)\right| < 1 \iff |x-1| < \frac{4}{5} \iff \frac{1}{5} < x < \frac{9}{5}$$

gilt.

b) Mit der Substitution

$$x := \sin(t)\,, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t\,, \quad dx = \cos(t)\cdot t\,, \qquad [1 \text{ punkt}]$$

erhält man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{7+\sin(t)}{(2+\sin(t))(3+\sin(t))}\cos(t)\,dt = \int_0^1 \frac{7+x}{(2+x)(3+x)}\,dx \qquad [1 \text{ punkt}]$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{7+x}{(2+x)(3+x)} = \frac{a}{2+x} + \frac{b}{3+x} = \frac{a(3+x)+b(2+x)}{(2+x)(3+x)} \qquad [1 \text{ punkt}]$$

Die Koeffizienten a, b errechnen sich aus der Bedingung

$$a(3+x) + b(2+x) \;=\; 7+x\,.$$

Einsetzen der Nennernullstellen ergibt

$$\begin{array}{lll} x=-2: & a(+1)=5 \implies a=+5 & \\ x=-3: & b(-1)=4 \implies b=-4 & \text{[1 punkte]} \end{array}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{7+\sin(t)}{(2+\sin(t))(3+\sin(t))}\cos(t)\,dt &= \int_0^1 \frac{7+x}{(2+x)(3+x)}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{5}{2+x} - \frac{4}{3+x}\,dx \;=\; [\,5\ln|2+x| \;-\; 4\ln|3+x|\,]_0^1 \\ &= 5(\ln(3)-\ln(2)) - 4(\ln(4)-\ln(3)) \qquad \text{[2 punkte]} \end{aligned}$$

Aufgabe 2)

a) Gegeben seien die Kurve

$$c:[0;6\pi]\mapsto\mathbb{R}^3 \qquad c: t\longmapsto (4\cos(t)\,,4\sin(t)\,,3t\,)^T\,,$$

und die Funktion $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x\,y\,z\,.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral von f längs c .

Hinweis zu Teil a): $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

b) Gegeben sei die Funktion $f:[0,4\pi[\to\mathbb{R}$ mit

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 1, & 0\le t \,<\, 2\pi, \\ -1, & 2\pi\le t \,<\, 4\pi. \end{cases}$$

(i) Skizzieren Sie die 4π–periodische Fortsetzung von f im Bereich $-4\pi \le t \le 4\pi$.

(ii) Berechnen Sie die reellen Fourier–Koeffizienten der 4π–periodischen Fortsetzung von f .

Lösung der Aufgabe 2)

a)

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) &= (-4\sin(t)\,, 4\cos(t)\,, 3\,)^T\,, \\
\|\dot{c}(t)\| &= \sqrt{(-4\sin(t))^2 + \,(4\cos(t))^2\, + 3^2} \,=\, 5\,, \\
f(c(t)) &= 4\sin(t)\cdot 4\cos(t)\cdot 3t \,=\, 48t\cdot\sin(t)\cos(t) = 24t\cdot\sin(2t) \qquad \text{[3 Punkte]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{6\pi} f(c(t))\cdot\|\dot{c}(t)\|\,dt &= \int_0^{6\pi} 24t\cdot\sin(2t)\cdot 5dt \\
&= 60\int_0^{6\pi} t\cdot 2\sin(2t)dt \,=\, 60\,[t(-\cos(2t))]_0^{6\pi} \,-\, 60\int_0^{6\pi}(-\cos(2t))dt \\
&= 60(-6\pi\cdot\cos(12\pi) - 30\,[\sin(2t))]_0^{6\pi} \,=\, -360\pi\,. \text{ [2 Punkte]}
\end{aligned}$$

b) (i) Skizze: [1 Punkt]

(ii) f ist eine ungerade Funktion, also gilt

$$\begin{aligned}
a_k &= 0 \qquad \forall \quad k\in\mathbb{N} \qquad [1Punkt] \\
b_k &= \frac{4}{4\pi}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1\cdot\sin\left(k\frac{2\pi}{4\pi}t\right)dt \,=\, \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{k}{2}t\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2}{k}\cos\left(\frac{k}{2}t\right)\right]_0^{2\pi} \,=\, \frac{2}{k\pi}(-\cos(k\pi)+\cos 0) \\
&= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade,} \\ \frac{4}{k\pi} & k \text{ ungerade.} \qquad \text{[3 Punkte]} \end{cases}
\end{aligned}$$

Hinweis: Alle Integrale sind elementar zu berechnen. Stammfunktionen aus Formelsammlungen etc. dürfen nicht verwendet werden.

Viel Erfolg!