**Aufgabe 1)** [4+ 6]

a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei der Drehung des Funktionsgraphen von $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^x$ um die $x$-Achse, zwischen der Mantelfläche und der $x-$ Achse, entsteht.

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{5e^{2x} - 10e^x - 3}{(e^x - 3)(e^x - 1)}\, dx$$

mit Hilfe der Substitution $t = e^x$.

**Lösung der Aufgabe 1)** [4+ 6]

a)

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 x^2 e^{2x}\, dx && [1 punkt] \\
&= \pi \left[ x^2 \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \pi \int_0^1 2x\, \frac{e^{2x}}{2}\, dx && [1 punkt] \\
&= \pi\, \frac{e^2}{2} - \pi \left[ x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 + \pi \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\, dx && [1 punkt] \\
&= \pi \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \left[ e^{2x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \left[ e^2 - 1 \right]. && [1 punkt]
\end{aligned}$$

b) Mit der Substitution

$$t := e^x, \quad \tfrac{dt}{dx} = e^x = t, \quad dx = \tfrac{dt}{t},$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\int \frac{5e^{2x} - 10e^x - 3}{(e^x - 3)(e^x - 1)}\, dx &= \int \frac{5t^2 - 10t - 3}{t(t-3)(t-1)}\, dt && [1 punkt] \\
&= \int \frac{a}{t} + \frac{b}{t-3} + \frac{c}{t-1}\, dt && [1 punkt]
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten errechnen sich aus der Bedingung

$$a(t-3)(t-1) + bt(t-1) + c(t(t-3) = 5t^2 - 10t - 3\,.$$

Einsetzen der Nennernullstellen ergibt

$$\begin{aligned}
t = 0 :& \quad a(-3)(-1) = -3 \implies a = -1 \\
t = 3 :& \quad b(3)(2) = 45 - 30 - 3 = 12 \implies b = 2 \\
t = 1 :& \quad c(1)(-2) = 5 - 10 - 3 = -8 \implies c = 4 \qquad [2 punkte]
\end{aligned}$$

und somit

$$\int \frac{5e^{2x} - 10e^x - 3}{(e^x-3)(e^x-1)}\,dx = \int \frac{5t^2 - 10t - 3}{t(t-3)(t-1)}\,dt = \int \frac{-1}{t} + \frac{2}{t-3} + \frac{4}{t-1}\,dt$$
$$= -\ln|t| + 2\ln|t-3| + 4\ln|t-1| + C$$
$$= -x + 2\ln|e^x-3| + 4\ln|e^x-1| + C\,. \qquad [2punkte]$$

**Aufgabe 2)** Gegeben sei die Funktion $f : [1,2] \to \mathbb{R}\,,\quad f(x) = \dfrac{1}{1+x}\,.$

a) (i) Berechnen Sie mit Hilfe der einfachen Trapezregel ( $h = 1$ ) eine Näherung $T(f)$ für

$$I := \int_1^2 f(x)\,dx\,.$$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\max_{x\in[1,2]} |f''(x)| \le \frac{1}{4}$$

gilt.

(iii) Mit Hilfe der summierten Trapezregel soll eine Näherung $T_s(f,h)$ für

$$I = \int_1^2 f(x)\,dx$$

berechnet werden. Bestimmen Sie eine Schrittweite $h$, so dass der absolute Fehler maximal $10^{-3}$ beträgt. Das heißt:

$$|I - T_s(f,h)| \le 10^{-3}.$$

b) Berechnen Sie eine Näherung für $\arcsin(0.6)$, indem Sie das Interpolationspolynom $p_2$ zweiten Grades der Funktion $g(x) = \arcsin(x)$ zu den folgenden Daten bestimmen und an der Stelle $x = 0.6$ auswerten.

| $x_k$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g(x_k)$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

**Lösung der Aufgabe 2)**

a) (i)

$$\int_1^2 f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(2) + f(1)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{12}\,. \qquad [1Punkt]$$

(ii) Für alle $x \in [1,2]$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \\
|f''(x)| &= \left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| \leq \frac{2}{(1+1)^3} = \frac{1}{4}\,. \qquad [2 Punkte]
\end{aligned}
$$

(iii) Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt

$$
\left|\int_1^2 f(x)dx - T\left(f[1,2]\right)\right| \leq \frac{(2-1)}{12} h^2 \max_{x\in[1,2]} |f''(x)|\,. \leq \frac{h^2}{12}\cdot\frac{1}{4} = \frac{h^2}{48}\,. \qquad [1 Punkt]
$$

Es genügt also eine Schrittweite mit

$$
h^2 < 48\cdot 10^{-3} = 0.048 \qquad \text{zum Beispiel} \qquad h = 0.2\,. \qquad [1 Punkt]
$$

b) Die Koeffizienten des Interpolationspolynoms können durch Lösen der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&y_0 = a_0 = 0\,,\\
&y_1 = \tfrac{\pi}{6} = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = a_1\left(\frac{1}{2} - 0\right) \iff a_1 = \frac{\pi}{3}\,,\\
&y_2 = \tfrac{\pi}{2} = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3} + \frac{a_2}{2} \iff a_2 = \frac{\pi}{3}\,,
\end{aligned}
$$

oder durch Berechnung der dividierten Differenzen

$$
\begin{array}{cccc}
x_j & y_j = [x_j] & [x_{j-1,j}] & [x_{j-2,j}] \\
\hline
0 & 0 & & \\
 & & \frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3} & \\
\frac{1}{2} & \frac{\pi}{6} & & \frac{\frac{\pi}{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \\
 & & \frac{\frac{2\pi}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3} & \\
1 & \frac{\pi}{2} & &
\end{array}
$$

bestimmt werden. Man erhält

$$
p_2(x) = 0 + \frac{\pi}{3}(x - x_0) + \frac{\pi}{3}(x - x_0)(x - x_1) = 0 + \frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3}x\left(x - \frac{1}{2}\right) \qquad [4 Punkte]
$$

und damit

$$
p_2(0.6) = 0 + \frac{\pi}{3}\frac{3}{5} + \frac{\pi}{3}\frac{3}{5}\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{11\pi}{50}\,. \qquad [1 Punkt]
$$