10.2 Kurven und Bogenlänge

Definition: *Sei* $c = (c_1, \dots, c_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine stetige Funktion.*

- *Dann wird* c *als* Kurve *im* $\mathbb{R}^n$ *bezeichnet;* $c(a)$ *heißt* Anfangspunkt, $c(b)$ *heißt* Endpunkt *von* c. c *heißt* geschlossene Kurve, *falls* $c(a) = c(b)$.
- *Falls* $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *eine* C^1*-Funktion, d.h. jede Koordinatenfunktion* $c_j(t)$ *ist stetig differenzierbar, so heißt* $c(t)$ *eine* C^1-Kurve.
- $c(t)$ *heißt* stückweise C^1-Kurve, *falls es eine Zerlegung*

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

  gibt, so dass $c(t)$ *auf jedem Teilintervall* $[t_j, t_{j+1}]$ *eine* C^1*-Funktion ist.*
- *Die Kurve* c *heißt* glatt, *falls*

$$\frac{d}{dt}c(t) := \dot{c}(t) = (c_1'(t), \dots, c_n'(t))^T \neq 0 \qquad \textit{für alle } t \in [a, b].$$

□

Beispiele:

- Die Kurve

$$c(t) := (\cos(t), \sin(t))^T \qquad t \in [0, 2\pi]$$

beschreibt einen Kreis im $\mathbb{R}^2$.

- Die Kurve

$$c(t) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))^T$$

beschreibt eine Zykloide.

Wegen

$$\dot{c}(t) = (r(1 - \cos(t)), r\sin(t))^T$$

ist die Kurve an den Stellen $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht glatt.

- Die Kurve

$$c(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t), ht)^T \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

beschreibt eine Schraubenlinie (Helix) mit Radius r und Ganghöhe h.

Umparametrisierung von Kurven.

Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung, so hat die Kurve

$$(c \circ h)(\tau) = c(h(\tau)) \qquad \text{für } \alpha \leq \tau \leq \beta$$

die gleiche Gestalt und den gleichen Durchlaufsinn wie die Kurve c.

Bemerkungen:

- Man nennt $t = h(\tau)$ eine Umparametrisierung (Parameterwechsel). Die Kurven c und $c \circ h$ werden als gleich angesehen.
- Im Fall einer C^1-Kurve werden nur C^1-Parameterwechsel zugelassen.
- Jede stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ beschreibt eine Kurve mit

$$c(x) := (x, f(x))^T \qquad \text{für } a \leq x \leq b$$

bzw. $c(t) := (a + t(b - a), f(a + t(b - a)))^T$ für $0 \leq t \leq 1$.

Die Bogenlänge einer Kurve.

Sei $Z = \{a = t_0 < t_1 \ldots < t_m = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so ist

$$L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} \|c(t_{j+1}) - c(t_j)\|$$

eine untere Schranke für die Bogenlänge der Kurve $c(t)$.

Definition: *Ist die Menge* $\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\}$ *nach oben beschränkt, so heißt die Kurve* c rektifizierbar*, und in diesem Fall ist*

$$L(c) := \sup\{L(Z) : Z \in \mathbf{Z}[a, b]\} = \lim_{\|Z\| \to 0} L(Z)$$

die Länge *der Kurve* c. □

Berechnung der Bogenlänge einer C^1-Kurve.

Satz: *Jede C^1-Kurve ist rektifizierbar, und es gilt*

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beweisidee: *Zunächst gilt die Darstellung*

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j))^2}$$

und nach dem Mittelwertsatz gibt es Zahlen τ_{k_j} mit $t_j \le \tau_{k_j} \le t_{j+1}$, so dass

$$c_k(t_{j+1}) - c_k(t_j) = c_k'(\tau_{k_j}) \cdot (t_{j+1} - t_j),$$

somit

$$L(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (c_k'(\tau_{k_j}))^2} \cdot (t_{j+1} - t_j) \right). \qquad \blacksquare$$

Beispiel.

Berechnen die Länge eines Zykloidenbogens

$$c(t) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))^T \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (r(1 - \cos(t)), r\sin(t))^T \\ \|\dot{c}(t)\| &= r\sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = 2r\sin(t/2) \\ L(c) &= 2r\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\,dt = 8r \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Bogenlänge einer C^1–Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung, denn es gilt

$$L(c \circ h) = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))h'(\tau)\|\,d\tau = \int_\alpha^\beta \|\dot{c}(h(\tau))\|h'(\tau)\,d\tau = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\,dt = L(c)$$

$\square$

Die Bogenlängenfunktion einer C^1-Kurve.

Definition: *Sei* $c : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine* C^1*–Kurve.*

- *Die Funktion*

$$S(t) := \int_a^t \|\dot{c}(\tau)\| \, d\tau$$

  heißt die Bogenlängenfunktion *von* c*.*

- *Ist* c *glatt, so ist* $S : [a, b] \to [0, L(c)]$ *ein* C^1*-Parameterwechsel.*

- *Die Umkehrabbildung* $t = S^{-1}(s)$, $0 \leq s \leq L(c)$, *ist dann ebenfalls ein* C^1*-Parameterwechsel.*

- *Die Parametrisierung*

$$\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s)) \qquad \text{für } 0 \leq s \leq L(c)$$

  von c *nennt man die* Parametrisierung nach der Bogenlänge*.* □

Eigenschaften der Bogenlängenparametrisierung.

Bemerkung: Für die Bogenlängenparametrisierung $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ gilt:

- Die Ableitung von $\tilde{c}(s)$ ist gegeben durch

$$\tilde{c}'(s) = \dot{c}(S^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}(S^{-1}(s))\|}$$

  Daher ist $\tilde{c}'(s)$ ist ein Einheitsvektor, d.h. mit dieser Parametrisierung wird die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen. Weiterhin ist $\tilde{c}'(s)$ der Einheitstangentenvektor von c.

- Aus $\langle \tilde{c}'(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 1$ folgt durch Differentiation

$$\langle \tilde{c}''(s), \tilde{c}'(s) \rangle = 0$$

  d.h. der Beschleunigungsvektor $\tilde{c}''(s)$ bezüglich der Bogenlänge steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\tilde{c}'(s)$.

$\square$

Hauptnormale und Krümmung.

Definition: *Sei* $\tilde{c}(s) = c(S^{-1}(s))$ *die Bogenlängenparametrisierung der Kurve* c*.*

- *Dann bezeichnet man den Vektor*

$$n(s) := \frac{\tilde{c}''(s)}{\|\tilde{c}''(s)\|}$$

als den Hauptnormalenvektor *von* c*.*

- *Die Funktion*

$$\kappa(s) := \|\tilde{c}''(s)\| \qquad \text{für } 0 \le s \le L(c)$$

nennt man die Krümmung *von* c*.* □

Beispiel: Mit der Parametrisierung des Einheitskreises nach der Bogenlänge:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(s) &= (\cos(s), \sin(s)) \qquad \text{für } 0 \le s \le 2\pi \\
n(s) &= \tilde{c}''(s) = -(\cos(s), \sin(s)) \\
\kappa(s) &\equiv 1
\end{aligned}$$

Parametrisierungen von Funktionsgraphen.

Betrachte Graph von $y = y(x)$ als Kurve im $\mathbb{R}^2$, d.h. $c(x) = (x, y(x))^T$. Dann:

$$c'(x) = (1, y'(x))^T \qquad ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \qquad \kappa(x) = \frac{|y''(x)|}{\left(\sqrt{1+(y'(x))^2}\right)^3}$$

Betrachte analog für $y(x)$ und $z(x)$ die Kurve $c(x) = (x, y(x), z(x))^T \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
c'(x) &= (1, y'(x), z'(x))^T \\
ds &= \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\, dx \qquad (\text{Bogenlängenelement}) \\
L(c) &= \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2}\, dx \\
\kappa(x) &= \frac{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)((y'')^2 + (z'')^2) - (y'y'' + z'z'')^2}}{\sqrt{(1 + (y')^2 + (z')^2)}}
\end{aligned}$$

Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten.

- Für die **Polarkoordinaten** $r \equiv r(t), \varphi \equiv \varphi(t)$ im $\mathbb{R}^2$ gilt:

$$c(t) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T \qquad \text{für } a \leq t \leq b$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\, dt.$$

- Für die **Kugelkoordinaten** $r \equiv r(t), \varphi \equiv \varphi(t), \psi \equiv \psi(t)$ im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$c(t) = (r\cos(\varphi)\cos(\psi), r\sin(\varphi)\cos(\psi), r\sin(\psi))^T \qquad \text{für } a \leq t \leq b$$

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\psi) + r^2\dot{\psi}^2}\, dt.$$

$\square$

Beispiel: Kardioide in Polarkoordinaten.

Betrachte die Kardioide (Herzlinie) in Polarkoordinaten:

$$r = a(1 + \cos(\varphi)) \qquad \text{für } a > 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Für den Umfang (d.h. Bogenlänge) der Kardioide gilt:

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\varphi) + a^2(1 + \cos(\varphi))^2}\, d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos \frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 8a$$

$\square$

Die von einer Kurve umschlossene Fläche.

Satz: *Für die von einer* C^1*-Kurve* $c(t) = (x(t), y(t))^T \in \mathbb{R}^2$ *überstrichene Fläche gilt:*

$$F(c) = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\ dt$$

Beweisskizze: Summiere für eine Zerlegung $Z \in \mathbf{Z}[a,b]$ über die Flächen

$$|F_i| = \frac{1}{2}\|c(t_i) \times c(t_{i+1})\| = \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \qquad \text{für } 0 \le i \le m-1.$$

$$\begin{aligned}
\curvearrowright F(Z) \quad &= \quad \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{t_{i+1} - t_i}\Delta t_i \\
&= \quad \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left(x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} y_i\right)\Delta t_i \\
&\to \quad \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t))\ dt. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beispiel: Die Archimedische Spirale.

Die Archimedische Spirale ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$x = a\,\varphi\,\cos(\varphi), \quad y = a\,\varphi\,\sin(\varphi), \qquad \text{für } a > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Berechnung des Umfangs (Bogenlänge) und der Fläche der innersten Schleife:

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 + a^2\varphi^2}\, d\varphi \\ &= \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \log\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \approx 4.158a \end{aligned}$$

und mit

$$x\dot{y} - \dot{x}y = r^2\dot{\varphi}$$

gilt

$$F = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2\, d\varphi \approx 1.292a^2.$$

$\square$

10.3 Kurvenintegrale

Definition: *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, *eine stetige Funktion und* $c : [a, b] \to D$ *eine stückweise* C^1*-Kurve. Dann wird das* Kurvenintegral *(*Linienintegral*) von* $f(x)$ *längs* c *definiert durch*

$$\int_c f(x)\, ds := \int_a^b f(c(t))\, \|\dot{c}(t)\|\, dt.$$

Notation: Für eine **geschlossene** Kurve c schreibt man auch

$$\oint_c f(s)\, ds.$$

Parametrisierungsinvarianz von Kurvenintegralen.

Satz: *Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve.*

Beweis: Für einen Parameterwechsel $h : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ einer Kurve c gilt

$$\begin{aligned}
\int_{c \circ h} f(x)\, ds &= \int_\alpha^\beta f(c(h(\tau))) \left\| \frac{d}{d\tau} c(h(\tau)) \right\| d\tau \\
&= \int_\alpha^\beta f(c(h(\tau))) \, \|\dot{c}(h(\tau))\| \, h'(\tau)\, d\tau \\
&= \int_a^b f(c(t)) \, \|\dot{c}(t)\| \; dt \\
&= \int_c f(x)\, ds
\end{aligned}$$

■

Beispiel. Betrachte einen krummlinigen mit Masse belegten Draht, beschrieben durch eine C^1-Kurve c und mit der (inhomogenen) Massendichte ρ.

- Für die Gesamtmasse des Drahtes bekommt man

$$\int_c \rho(x)\,ds := \int_a^b \rho(c(t))\,\|\dot{c}(t)\|\,dt.$$

- Der Schwerpunkt des Drahtes liegt bei

$$x_S = \frac{\int_c \rho(x)x\,ds}{\int_c \rho(x)\,ds}$$

- Das Trägheitsmoment des Drahtes ist gegeben durch

$$\theta = \int_c \rho(x) r^2(x)\,ds$$

wobei $r(x)$ der Abstand von der Drehachse ist. $\square$