9.4 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Integration rationaler Funktionen

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{wobei} \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Methode: Partialbruch-Zerlegung von rationaler Funktion $R(x)$.

Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) \quad &= \quad p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\ &\quad + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right] \end{aligned}$$

Erläuterungen.

- Ohne Einschränkung: $p(x)$ und $q(x)$ haben keine gemeinsamen Nullstellen.
- Das Polynom $p_1(x)$ tritt nur auf, falls

$$\deg(p) \geq \deg(q).$$

  In diesem Fall berechnet man $p_1(x)$ mit Polynomdivision, und es gilt

$$\frac{p_2(x)}{q(x)} = R(x) - p_1(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) = p_1(x) \cdot q(x) + p_2(x),$$

  mit $\deg(p_2) < \deg(q)$.
- Das Nennerpolynom $q(x)$ besitze
  - die **reellen** Nullstellen x_j mit Vielfachheit k_j;
  - die **komplexen** Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$ mit Vielfachheit k_j und damit komplex konjugierte Nullstellen $\bar{z}_j = a_j - ib_j$.

Ansatz der Partialbruch-Zerlegung.

$$
\begin{aligned}
R(x) \quad = \quad & p_1(x) + \sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{\alpha_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} \right] \\
& + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \left[\frac{\gamma_{j1} x + \delta_{j1}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^1} + \ldots + \frac{\gamma_{jk_j} x + \delta_{jk_j}}{\left((x-a_j)^2 + b_j^2\right)^{k_j}} \right]
\end{aligned}
$$

Unbekannte `Parameter`, die bestimmt werden müssen:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{j\ell}, \qquad & j = 1, \ldots, n_1, \; \ell = 1, \ldots, k_j; \\
\gamma_{j\ell}, \qquad & j = n_1 + 1, \ldots, n_2, \; \ell = 1, \ldots, k_j; \\
\delta_{j\ell}, \qquad & j = n_1 + 1, \ldots, n_2, \; \ell = 1, \ldots, k_j.
\end{aligned}
$$

Diese Parameter werden durch `Koeffizientenvergleich` berechnet, die rechte Seite wird dabei auf den Hauptnenner gebracht.

Beispiel. Betrachten die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)}$$

- Ansatz:

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad 1-x &= x(x^2+1)\alpha_1 + (x^2+1)\alpha_2 + x^2(\gamma_1 x + \delta_1) \end{aligned}$$

- Ausmultiplizieren:

$$1-x = (\alpha_1+\gamma_1)x^3 + (\alpha_2+\delta_1)x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$$

- Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_1+\gamma_1 = 0, \quad \alpha_2+\delta_1 = 0, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 1$$

- Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Bei der Integration rationaler Funktionen gibt es 4 Grundtypen:

Typ I: Polynome:

$$\int \sum_{k=0}^{s} c_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

Typ II: Inverse Potenzen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \log(|x-x_0|) + C & \text{für } \ell = 1 \\ \frac{1}{1-\ell} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & \text{für } \ell = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ III:

$$I_\ell := \int \frac{1}{(x^2+1)^\ell}\,dx \qquad \text{für } \ell \in \mathbb{N}$$

- Für $\ell = 1$ gilt

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + C$$

- Für $\ell > 1$ kann man I_ℓ wie folgt *rekursiv* berechnen.

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2,3,\ldots.$$

Herleitung der Rekursion.

- Substitution: Setze $u = x^2 + 1$ in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx &= \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{u^{\ell-1}} + C\\ &= \frac{1}{1-\ell}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}} + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}I_{\ell-1} &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{\ell-1}}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^\ell}\,dx = \int \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^\ell}\,dx + I_\ell\\ &= \frac{x}{2(1-\ell)(x^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)}\cdot I_{\ell-1} + I_\ell\end{aligned}$$

Somit:

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)}\left[(3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{x}{(x^2+1)^{\ell-1}}\right] \qquad \text{für } \ell = 2,3,\ldots. \quad \blacksquare$$

Grundtypen der Integration rationaler Funktionen.

Typ IV:

$$\int \frac{cx+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx = \frac{c}{2}\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx + (d+ca)\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}$$

- Erstes Integral:

$$\int \frac{2(x-a)}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell}\,dx = \int \frac{du}{u^\ell} \qquad \text{mit } u=(x-a)^2+b^2.$$

$$= \begin{cases} \log\left(\left|(x-a)^2+b^2\right|\right)+C & \text{für } \ell=1 \\ \dfrac{1}{1-\ell}\cdot\dfrac{1}{\left((x-a)^2+b^2\right)^{\ell-1}}+C & \text{für } \ell=2,3,\ldots. \end{cases}$$

- Zweites Integral:

$$\int \frac{dx}{\left((x-a)^2+b^2\right)^\ell} = \frac{1}{b^{2\ell-1}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^\ell} \qquad \text{mit} \quad t=\frac{x-a}{b}.$$

Beispiel.

Betrachten erneut die rationale Funktion

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} \\ &= -\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned} \int R(x)\,dx &= -\int \frac{dx}{x}+\int \frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}-\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= -\log(|x|)-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\arctan(x)+C \end{aligned}$$

■

Substitution bei verwandten Integralen.

Sei $R(x)$ eine rationale Funktion.

Dann lassen sich die folgenden Integrale durch Substitution vereinfachen.

- Setze $t = e^x$ in

$$\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$$

- Mit $t = \tan(x/2)$ bekommt man

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

und somit durch Substitution in

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$\square$

9.5 Uneigentliche Integrale

Ziel: Berechne `uneigentliche Integrale`, d.h.

- Integrale über unbeschränkten Bereichen

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

- Integrale über unbeschränkten Funktionen mit Singularitäten am Rand

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{wobei } f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{R} \text{ stetig} \quad \text{oder} \quad f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R} \text{ stetig}$$

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *mit* $D \subset \mathbb{R}$ *heißt* `lokal integrierbar`, *falls* f *über jedem kompakten Teilintervall* $[a, b] \subset D$ *integrierbar ist.* □

Definition: *Ist eine Funktion* $f(x)$ *lokal integrierbar über* $[a, \infty)$ *bzw.* $(-\infty, b]$ *bzw.* $(-\infty, \infty)$, *so definiert man*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{y\to-\infty} \int_y^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{für } a \in \mathbb{R}.$$

□

Lokale Integrierbarkeit und uneigentliche Integrale.

Definition: Ist eine Funktion $f(x)$ lokal integrierbar über $(a, b]$ bzw. $[a, b)$ bzw. (a, b), so definiert man

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{y \to a^+} \int_y^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad := \quad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{für } c \in (a, b).$$

Ein Beispiel.

Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

Wegen

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\,\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} + C & \text{für } \alpha > 1 \\ \log(|x|) + C & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha = 1$. ■

Ein weiteres Beispiel. Betrachte das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx.$$

Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx = -\int_{-\infty}^{0} x e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx,$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \int_0^y x e^{-x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{y^2} e^{-u}\, du \qquad \text{mit } u = x^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-y^2}\right) \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } y \to \infty. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2}\, dx = 1$$

■

Konvergenzkriterien.

Satz: *Sei* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar. Dann gilt:*

(a) Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *existiert genau dann, wenn gilt*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, C > a \;:\; \forall\, z_1, z_2 > C \;:\; \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

(b) Ist das uneigentliche Integral absolut konvergent*, d.h.*

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

konvergiert, so konvergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

$\square$

Majorantenkriterium.

Satz: *Sei* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar. Dann gilt:*

(c)

$$\forall x \; : \; |f(x)| \leq g(x) \;\; \textit{und} \; \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{konvergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{absolut konvergent}$$

(d) Weiterhin gilt folgende Umkehrung:

$$\forall x \; : \; 0 \leq g(x) \leq f(x) \;\; \textit{und} \; \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \textit{divergent}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \textit{divergent.}$$

$\square$

Beispiel: Das Dirichlet-Integral

Betrachte das Dirichlet-Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Das Dirichlet-Integral ist konvergent, denn es gilt

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = -\frac{\cos(x)}{x}\bigg|_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

und somit

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{y_1} \to 0 \quad \text{für } y_1 \to \infty.$$

$\square$

Bemerkungen:

- Das Dirichlet-Integral ist *nicht* absolut konvergent;
- Das Dirichlet-Integral besitzt den Wert $I = \pi/2$. $\square$

Beispiel: Das Exponentialintegral

- Betrachte das Exponentialintegral

$$\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad \text{für } x < 0.$$

Wegen $\lim_{t\to-\infty} te^t = 0$ gibt es ein $C > 0$ mit $|te^t| \leq C$ für alle $t \in (-\infty, x]$, und somit gilt

$$\left|\frac{e^t}{t}\right| = \frac{|te^t|}{t^2} \leq \frac{C}{t^2}.$$

Mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2}\, dt$$

folgt die *absolute Konvergenz* des Exponentialintegrals $\mathrm{Ei}(x)$ für alle $x < 0$ aus dem Majorantenkriterium. ■

Beispiel: Die Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \qquad \text{für } x > 0.$$

Beachte: Für $0 < x < 1$ ist der Integrand von $\Gamma(x)$ singulär. Mit

$$\left| e^{-t} t^{x-1} \right| \le t^{x-1} \qquad \text{für } 0 < t \le 1$$

folgt jedoch in diesem Fall

$$\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\, dt = \frac{1}{x} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=1} = \frac{1}{x}\left(1 - \varepsilon^x\right) \to \frac{1}{x} \qquad \text{für } \varepsilon \to 0+ .$$

Die Konvergenz bei $t = \infty$ zeigt man wie beim Exponentialintegral:

$$\left| e^{-t} t^{x-1} \right| = \left| \frac{e^{-t} t^{x+1}}{t^2} \right| \le \frac{C}{t^2} \qquad \text{für } 1 \le t \le \infty.$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt die absolute Konvergenz von $\Gamma(x)$ für $x > 0$.

Weitere Bemerkungen zur Gamma-Funktion.

Die Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad x > 0$$

und es gilt

$$\Gamma(1) = 1.$$

$\square$

Folgerung: Es gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\blacksquare$